

電気回路と伝送線路の基礎

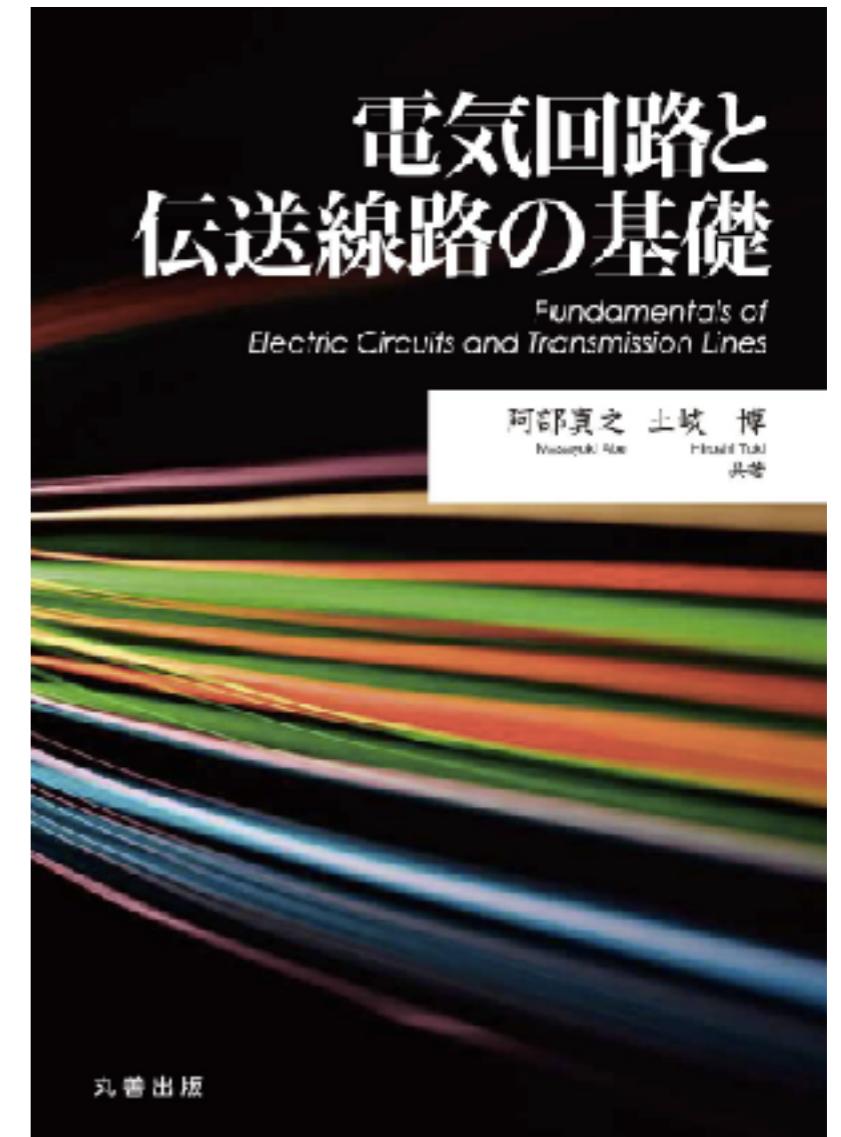
—5時間でノイズを理解する—

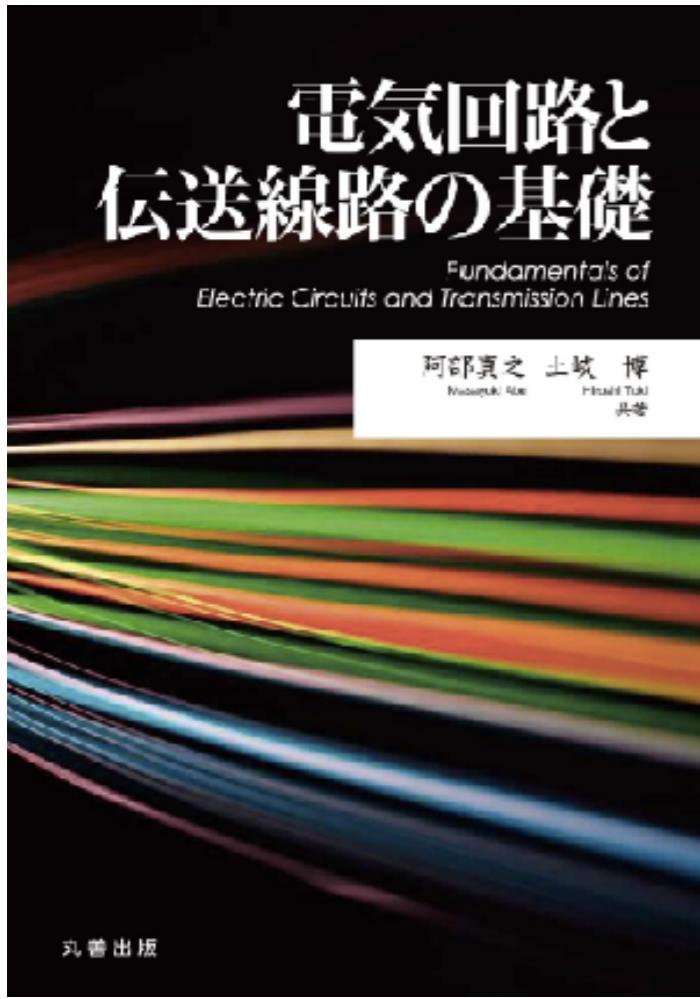
土岐 博

大阪大学基礎工学部・特任教授

阿部真之

大阪大学基礎工学部・教授





大まかなプラン

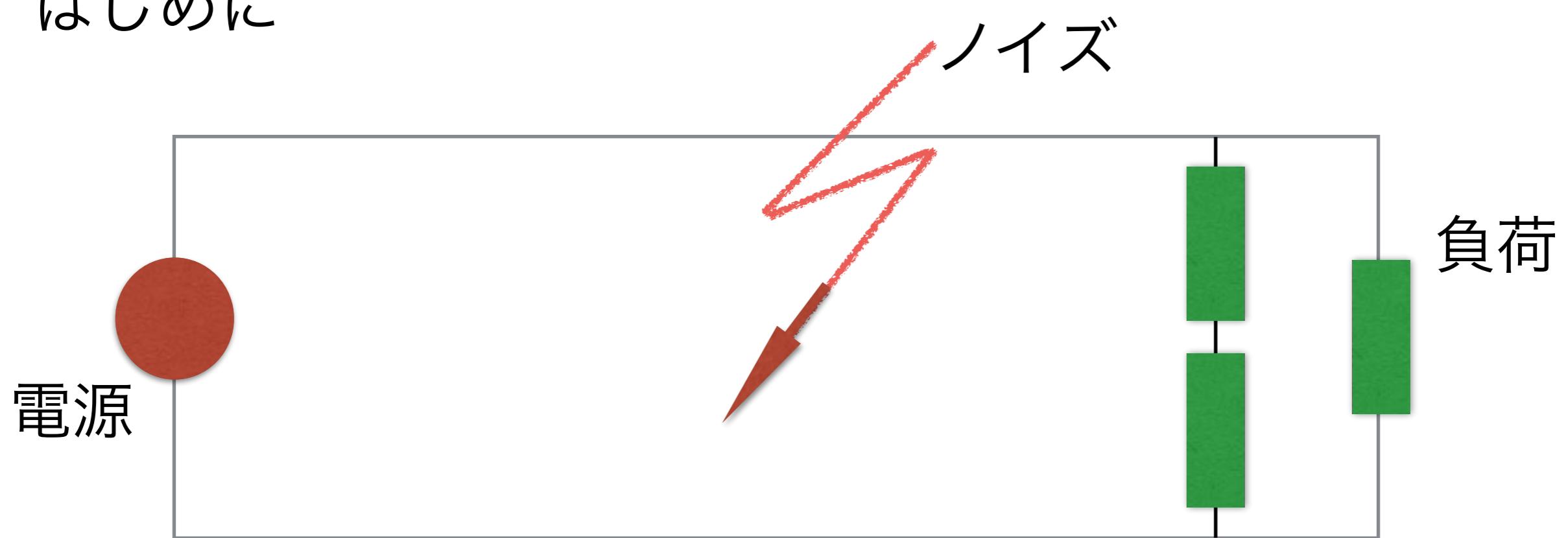
1. 全体で5回の授業とする
2. 授業は基本的には1時間とする
3. 授業後、有志はパソコン実習
4. パソコンを使って授業を理解

授業の目的

1. 電気回路を理解する
2. 伝送線路を理解する
3. 電気回路を自分で計算する
4. ノイズを自分で計算する



はじめに



電気回路には電線と電源と負荷がある
電源には直流と交流がある
負荷には抵抗、コンデンサー、コイル、
ダイオード、トランジスタ。。。がある
ノイズ！！（電線の物理）

1. 集中定数回路（電気回路）の理解
(1~96ページ)

2. 集中定数回路（電気回路）の一般化
(97~142ページ)

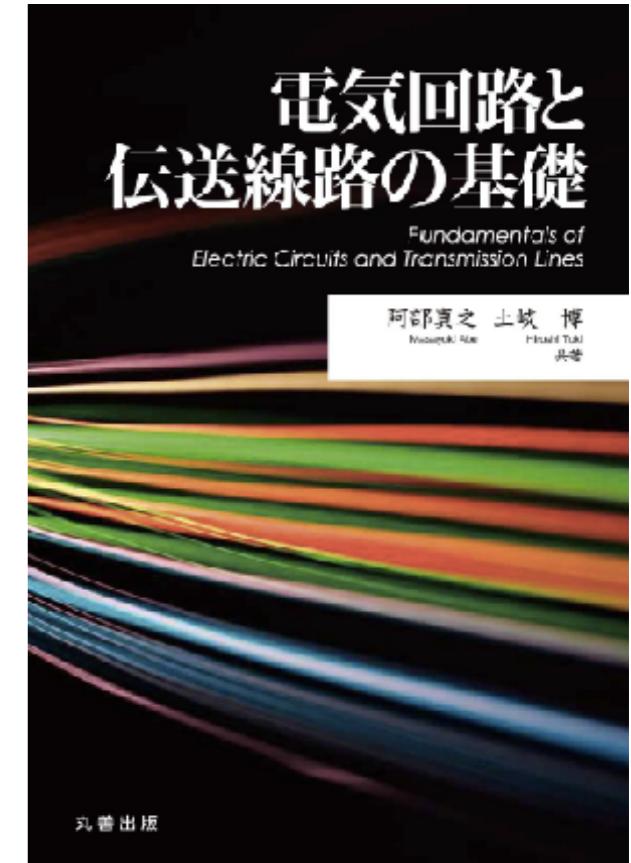
3. 分布定数回路（伝送線路）の理解
(143~172ページ)

4. 分布定数回路（伝送線路）方程式の導出
(173~212ページ)

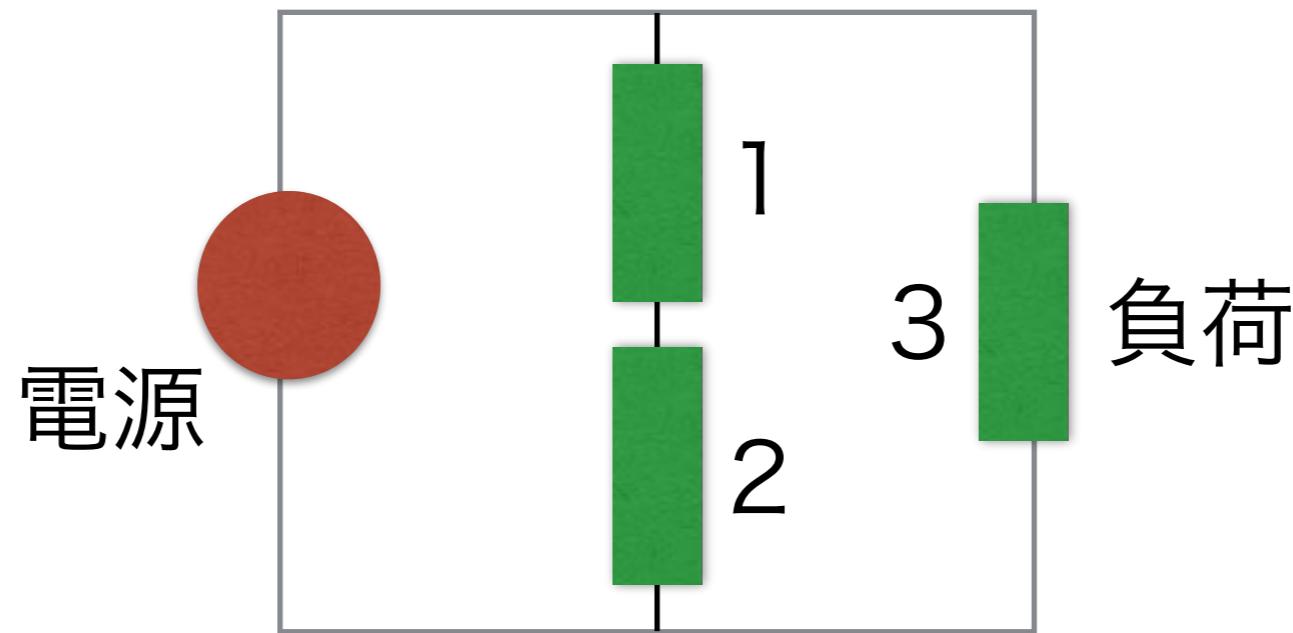
5. 3本線の分布定数回路（ノイズの起源）
(213~224ページ)

放課後。数値計算をパソコンで行う（有志に頑張ってもらう）

計算はすべてコンピュータにやってもらう
人は何をやっているのかを理解するだけで良い



1。集中定数回路

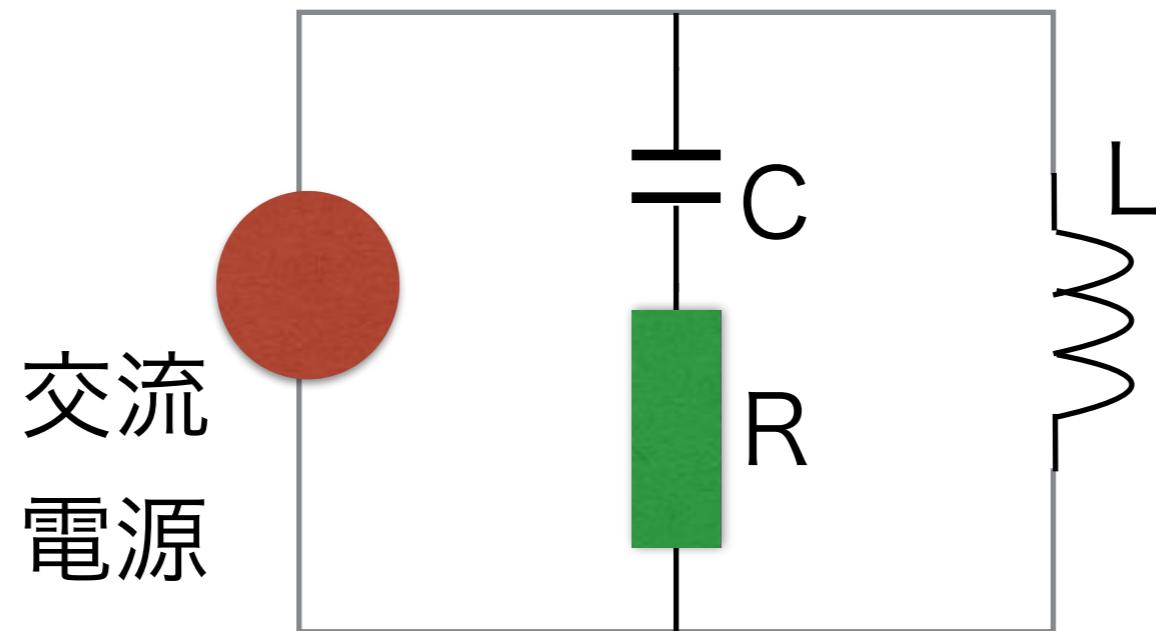


電源は1Vで負荷は抵抗でそれぞれが 1Ω とする
それぞれの負荷を流れる電流はいくらか？

$$i_{12} = e/(r_1 + r_2) = 1V/2\Omega = 0.5A$$

$$i_3 = e/r_3 = 1V/1\Omega = 1A$$

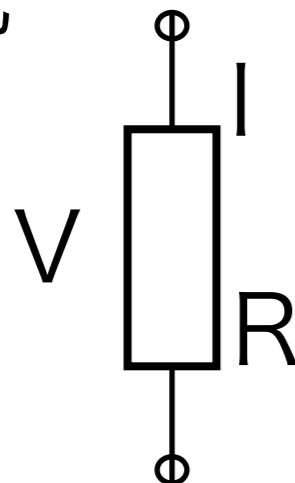
コンデンサとインダクタを含む回路



ちょっとややこしい！！
SPICEで計算してみるか！
複素数！
うーん！！！

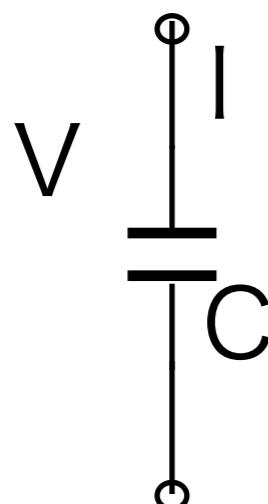
ゆっくりやりましょう 電子部品の性質

抵抗



電圧 電流 抵抗値
 $V = IR$

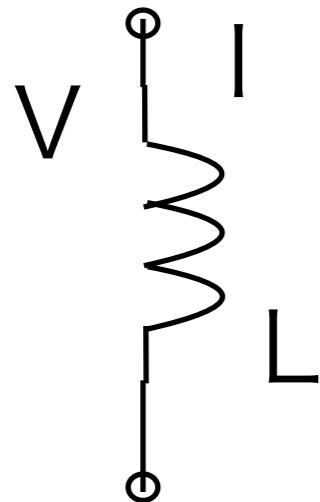
コンデンサ



$$Q = CV \quad \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$
$$I = C \frac{dV}{dt}$$

電圧の時間微分
電流 電気容量

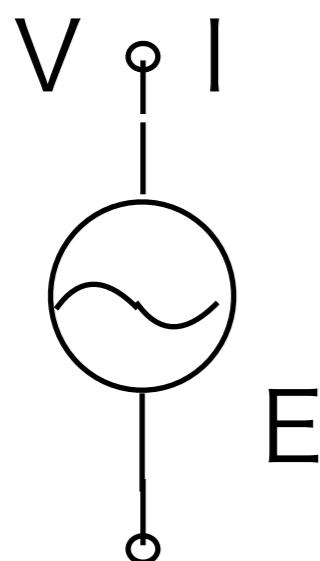
インダクタ



電圧 インダクタンス

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad \text{電流の時間微分}$$

電源

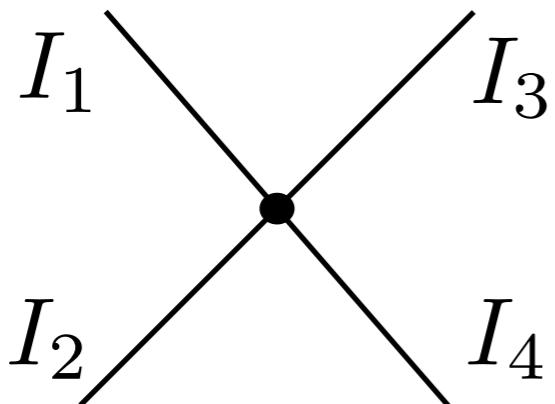


$$V = E$$

キルヒ霍フ(Kirchhof)

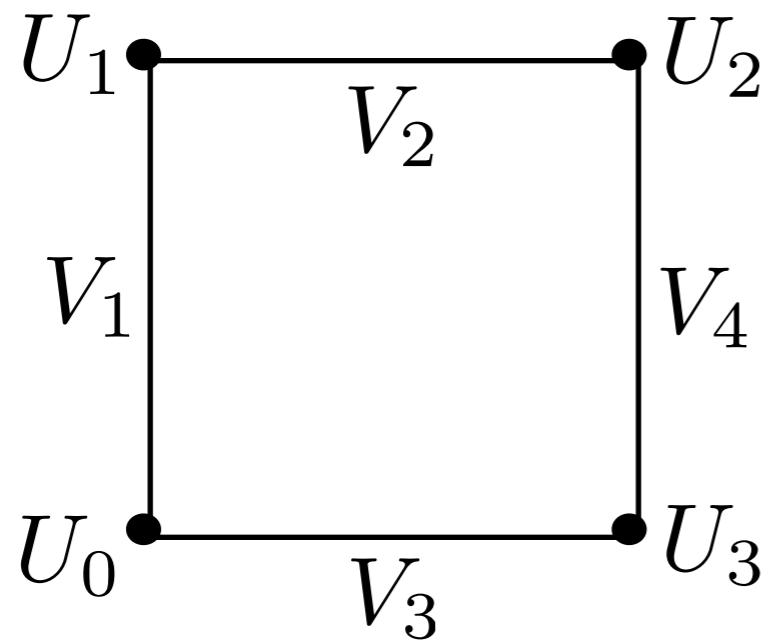
1850頃

第1法則：電流の総和はゼロ



$$\sum_i^N I_i = 0$$

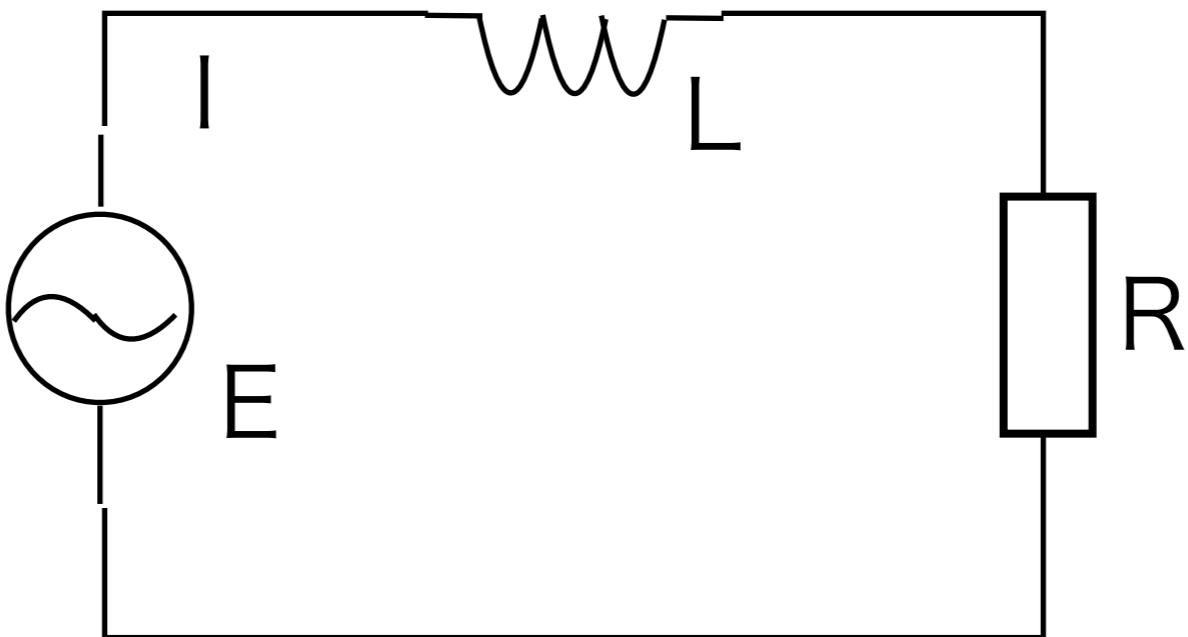
第2法則：電位差の総和はゼロ



$$\sum_i^N V_i = 0$$

$$V_i = U_i - U_{i-1}$$

電気回路は微分方程式

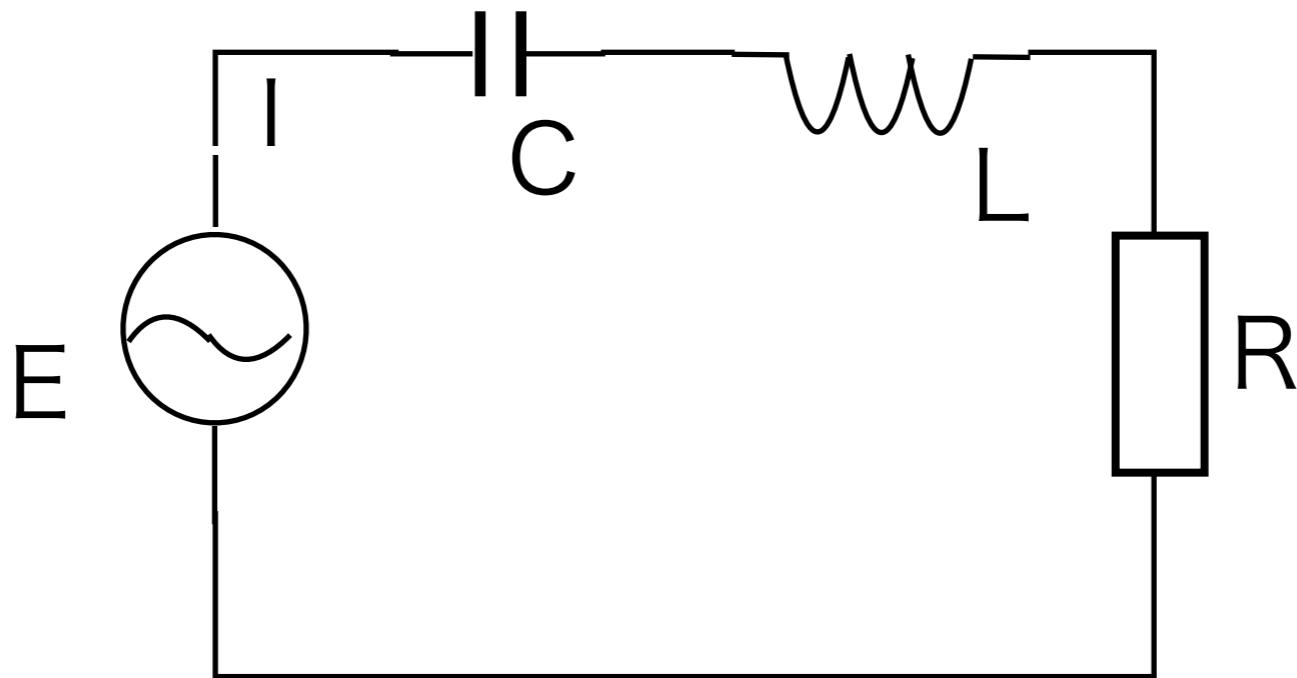


$$E = RI + L \frac{dI}{dt}$$

1階の微分方程式

微分方程式は紙の上で解くな！！
コンピュータに任せろ！

電気回路は微分方程式



$$E = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \quad \frac{dQ}{dt} = I$$

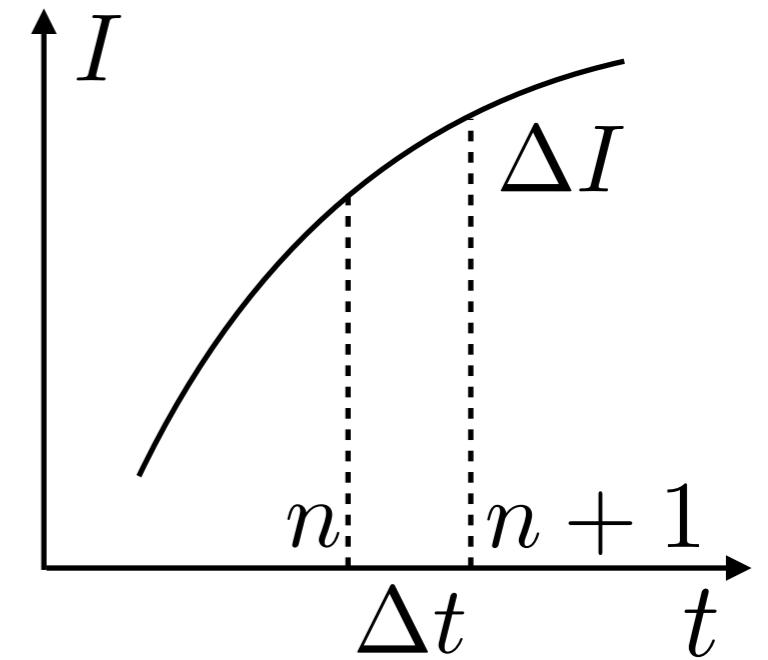
$$\frac{dE}{dt} = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C}$$

2階の微分方程式

微分方程式をコンピュータで解く
そのことにより回路理論を統一化する

$$E = RI + L \frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_{n+1} - I_n}{\Delta t}$$



したがって、nまで知った上で次の時間の値を求める

(漸化式)

$$I_{n+1} = I_n - \frac{\Delta t}{L} (RI_n - E_n)$$

n=0の値があれば、すべてのnでの数字がわかる

微分方程式を解く

- 1。方程式を差分化
- 2。 $n < 0$ の時の変数は全てゼロ
- 3。 $n = 1$ で E_1 に数字が入る
- 4。それにより、 I_2 の数字が決まる
- 5。その先は順次 I_n が決まる

2階の微分方程式

$$\frac{dE}{dt} = R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{I}{C}$$

$$E = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \quad \frac{dQ}{dt} = I$$

$$\frac{dI}{dt} = (E - RI - \frac{Q}{C})/L$$

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

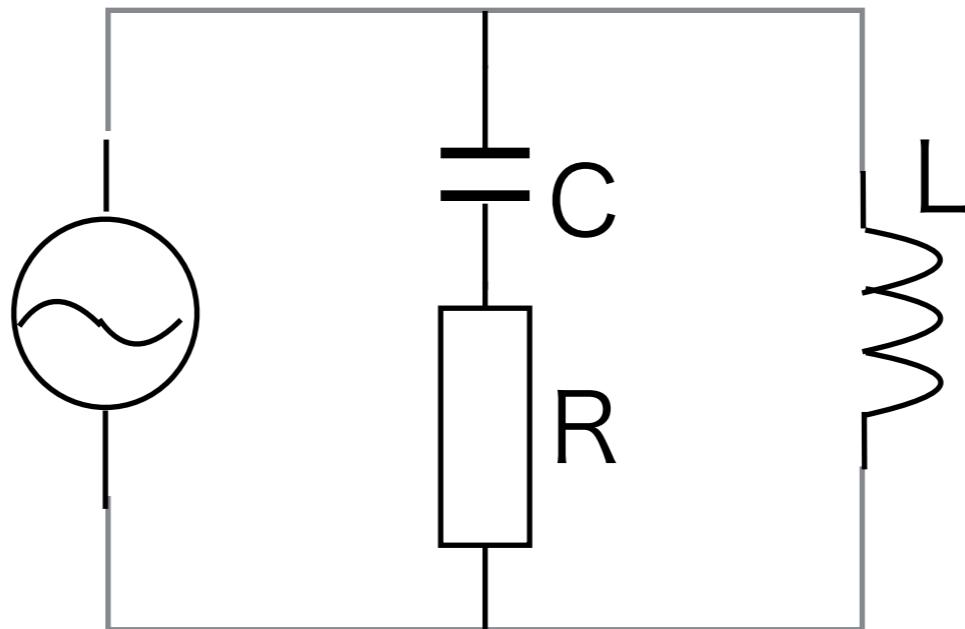
1階の連立微分方程式

$$I_{n+1} = I_n + (E_n - RI_n - \frac{Q_n}{C}) \frac{\Delta t}{L}$$

$$Q_{n+1} = Q_n + I_n \Delta t$$

順次決めていく

複雑な回路



系統的な方法を導入する
接点電位方程式
を作る
コンピュータで解く

96ページまで本を見ておいてください
(電気回路の基礎)

この本のオリジナルなところは
97ページから書いてある

パイソンで遊ぶ

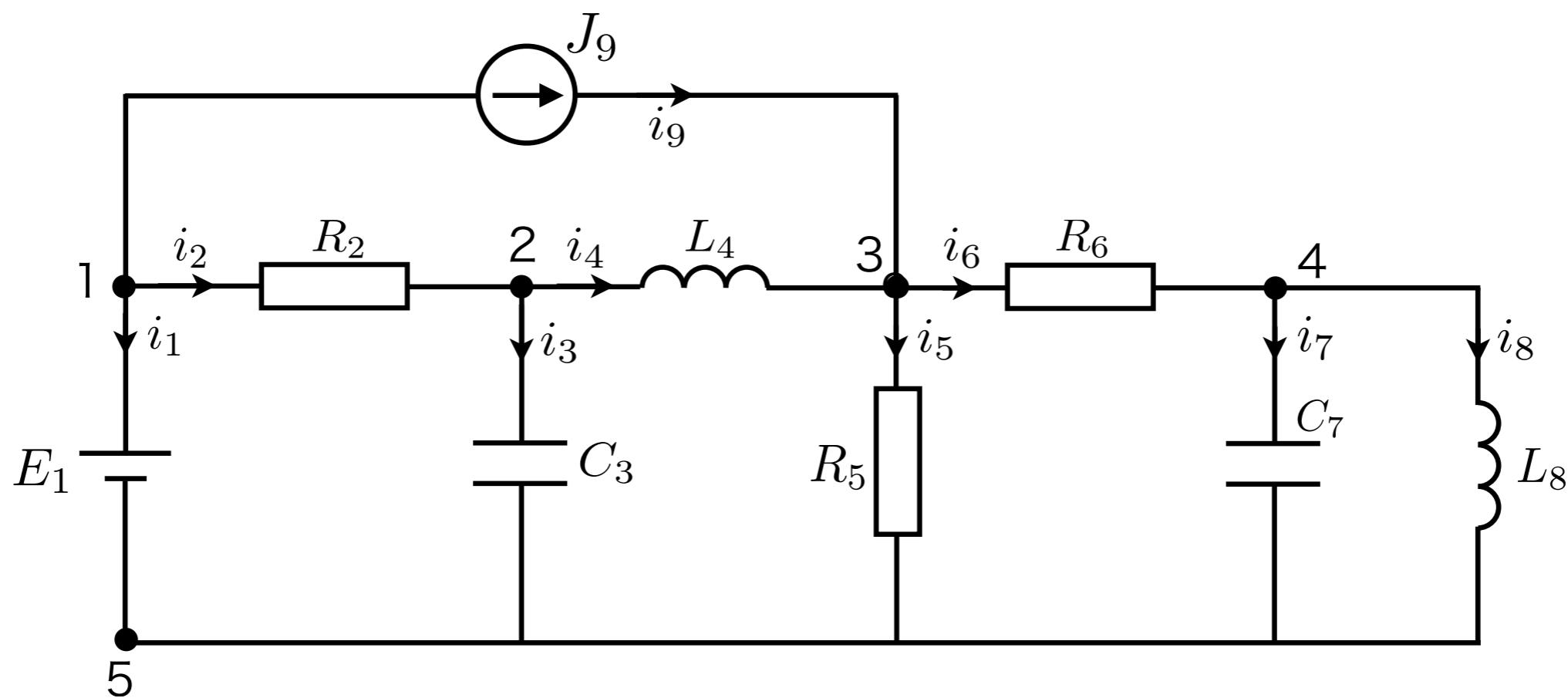
1 時限目のまとめ

- 1。複雑な回路は自分で解かない
- 2。コンピュータに任せる
- 3。どのように解くかのみを理解すべし
- 4。方程式の差分化がキー

2時間目

2. 集中定数回路（電気回路）の一般化 (97~142ページ) 第5章

複雑な回路は手計算しない
系統的な方法（行列を使う）



接続電位方程式

1. 素子のつなぎ目（接点）に番号をつける

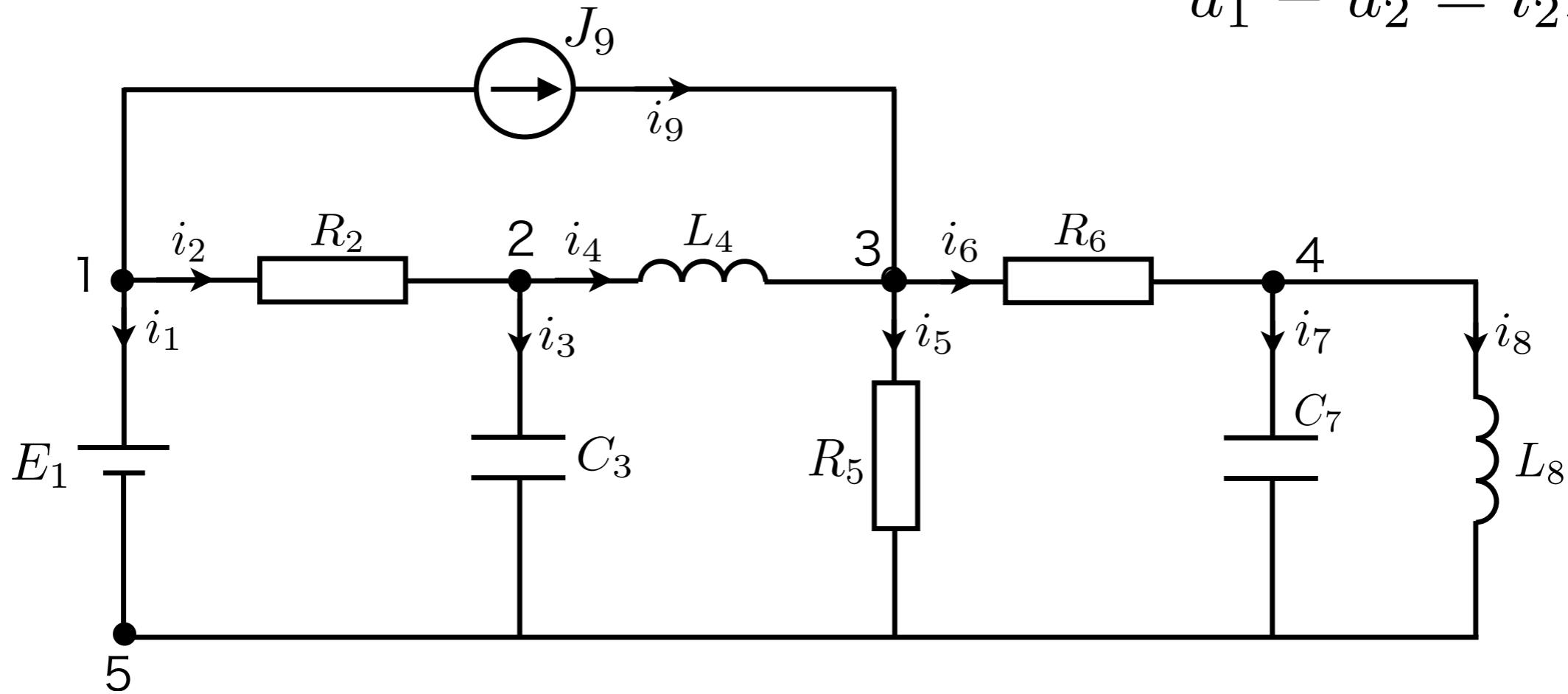
2. 素子を流れる電流を書き込む

3. KCLを接点ごとに使う

$$i_1 + i_2 + i_9 = 0$$

4. 接点間の素子の関係を使う : $V=IR$

$$u_1 - u_2 = i_2 R_2$$

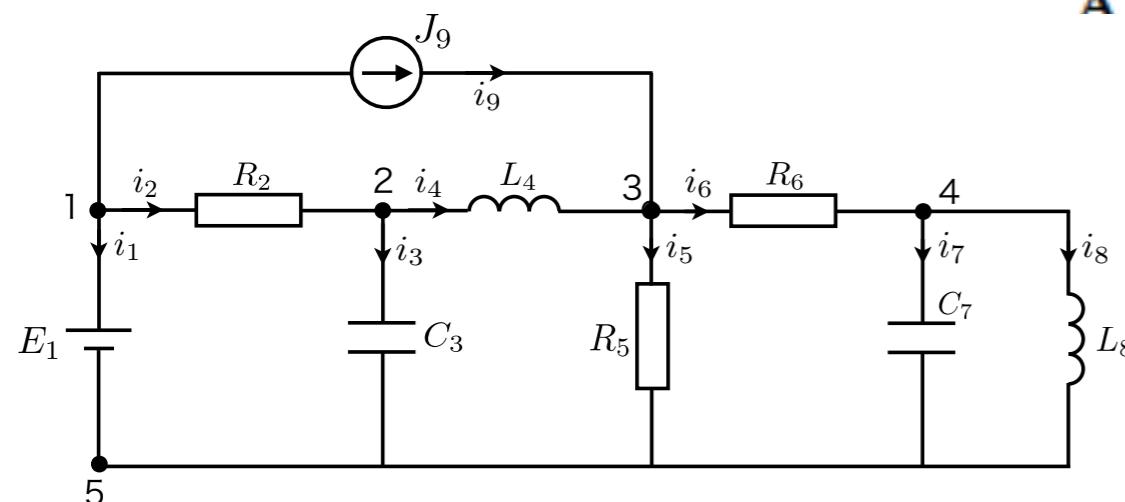


各節点でのKCLを書く

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} 1: & i_1 & +i_2 & & & & & & +i_9 = 0, \\ 2: & & -i_2 & +i_3 & +i_4 & & & & = 0, \\ 3: & & & & -i_4 & +i_5 & +i_6 & & -i_9 = 0, \\ 4: & & & & & -i_6 & +i_7 & +i_8 & = 0, \\ 5: & -i_1 & & -i_3 & & -i_5 & & -i_7 & -i_8 = 0. \end{array} \right.$$

行列で書く

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{0}}$$



$$AI = 0$$

行列はたくさんの数字の集まり

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 + 16 + 27 \\ 28 + 40 + 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ 122 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

接続行列

行番号は節点

列番号は素子（電流）

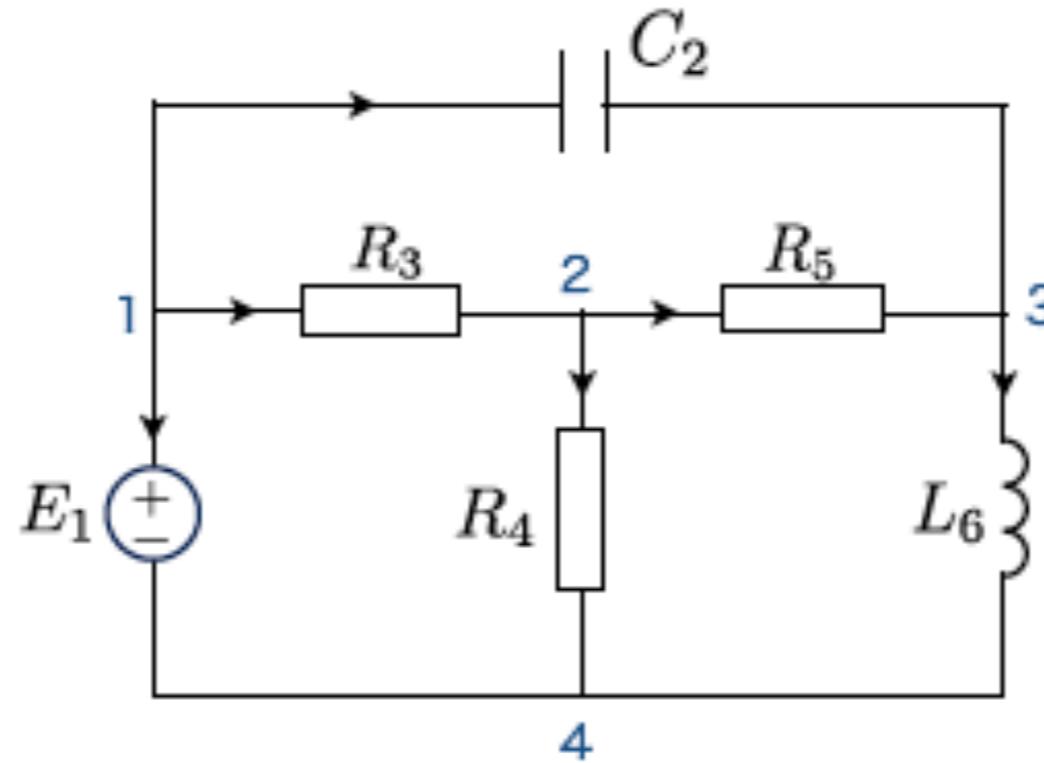
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} E_1 & R_2 & C_3 & L_4 & R_5 & R_6 & C_7 & L_8 & J_9 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

例) R_5 は節点3と節点5につながっており、節点3から節点5に電流が流れている

出て行く電流 : 1

入ってくる電流 : -1

接続行列を作る練習



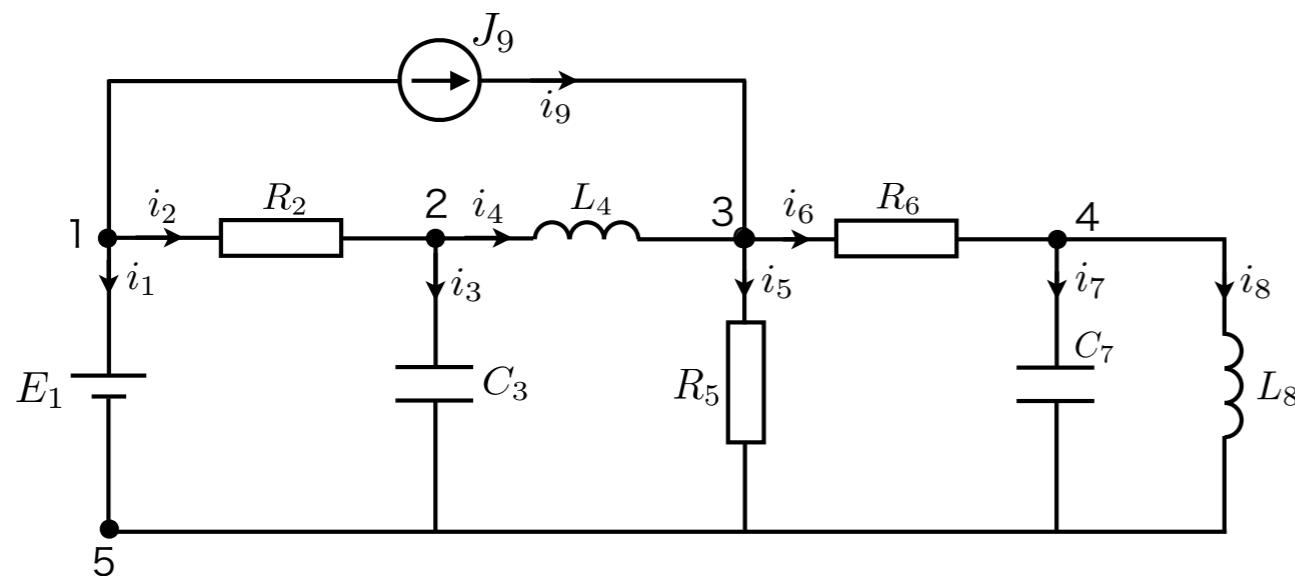
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} E_1 & C_2 & R_3 & R_4 & R_5 & L_6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

接続行列はすごい行列（接続行列の転置行列）

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline e_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ R_2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ L_4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ R_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ R_6 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ C_7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ L_8 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ J_9 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \\
 \underbrace{\quad\quad\quad}_{\mathbf{A}^T} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}}
 \end{array}$$

電位と電圧の関係

$$A^T U = V$$



転置

$$A_{ij} \rightarrow A_{ji}$$

一つ注意が必要——>規約接続行列

1。ポテンシャルには基準が必要

2。電流の関係(KCL)の一つは他から導ける

$$\left\{ \begin{array}{lllllllll} 1: & i_1 & +i_2 & & & & & +i_9 & = 0, \\ 2: & & -i_2 & +i_3 & +i_4 & & & & = 0, \\ 3: & & & -i_4 & +i_5 & +i_6 & & -i_9 & = 0, \\ 4: & & & & -i_6 & +i_7 & +i_8 & & = 0, \\ 5: & -i_1 & & -i_3 & & -i_5 & & -i_7 & -i_8 & = 0. \end{array} \right.$$

1,2,3,4の方程式を足す $i_1 + i_3 + i_5 + i_7 + i_8 = 0$

式5を捨てる——>方程式の数が一つ減る

$u_5 = 0$ とする——>未知数の数が一つ減る

KCL

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \underbrace{\begin{matrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \\ i_9 \end{matrix}}_{\mathbf{i}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_0$$

電位と電圧の関係

電流電源

$$\text{電圧電源 } e_1 \quad \text{電流電源 } J_9 \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ e_1 & R_2 & C_3 & L_4 & R_5 \\ R_6 & C_7 & L_8 & J_9 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \underbrace{\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{matrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{matrix}}_{\mathbf{V}}$$

未知数は
電流が8個
電位は4個

素子特性を行列で表す（電圧と電流の関係）

$$\begin{array}{l}
e_1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\
R_2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \\
C_3 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
L_4 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \\
R_5 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \\
R_6 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \\
R_7 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\
C_8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\
L_9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\
J_9 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0
\end{array} \underbrace{\left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{array} \right)}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{array} \right)}_{\mathbf{V}} = \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_8 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{array} \right)$$

電圧 電源は

$$V = E$$

電流電源は電流保存を満足する必要がある

$$\begin{pmatrix} A_r & A_J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix}$$

$$A_r I = - A_J J$$

を満足する必要がある

$$A_r \quad A_J \quad I$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \quad J \quad I$$

接続電位方程式

未知数(u,i)をすべて左辺に持ってくる

$$A_r^T U - ZI = E \quad \begin{pmatrix} A_r^T & -Z \\ 0 & A_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ -A_J J \end{pmatrix}$$

$$A_r I = -A_J J$$

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_J = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_8 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{pmatrix}$$

第6章

接続電位方程式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_r^T & -\mathbf{Z} \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}_J \mathbf{J} \end{pmatrix}$$

この方程式を解く

$$\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_r^T & -\mathbf{Z} \\ 0 & \mathbf{A}_r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{A}_J \mathbf{J} \end{pmatrix}$$

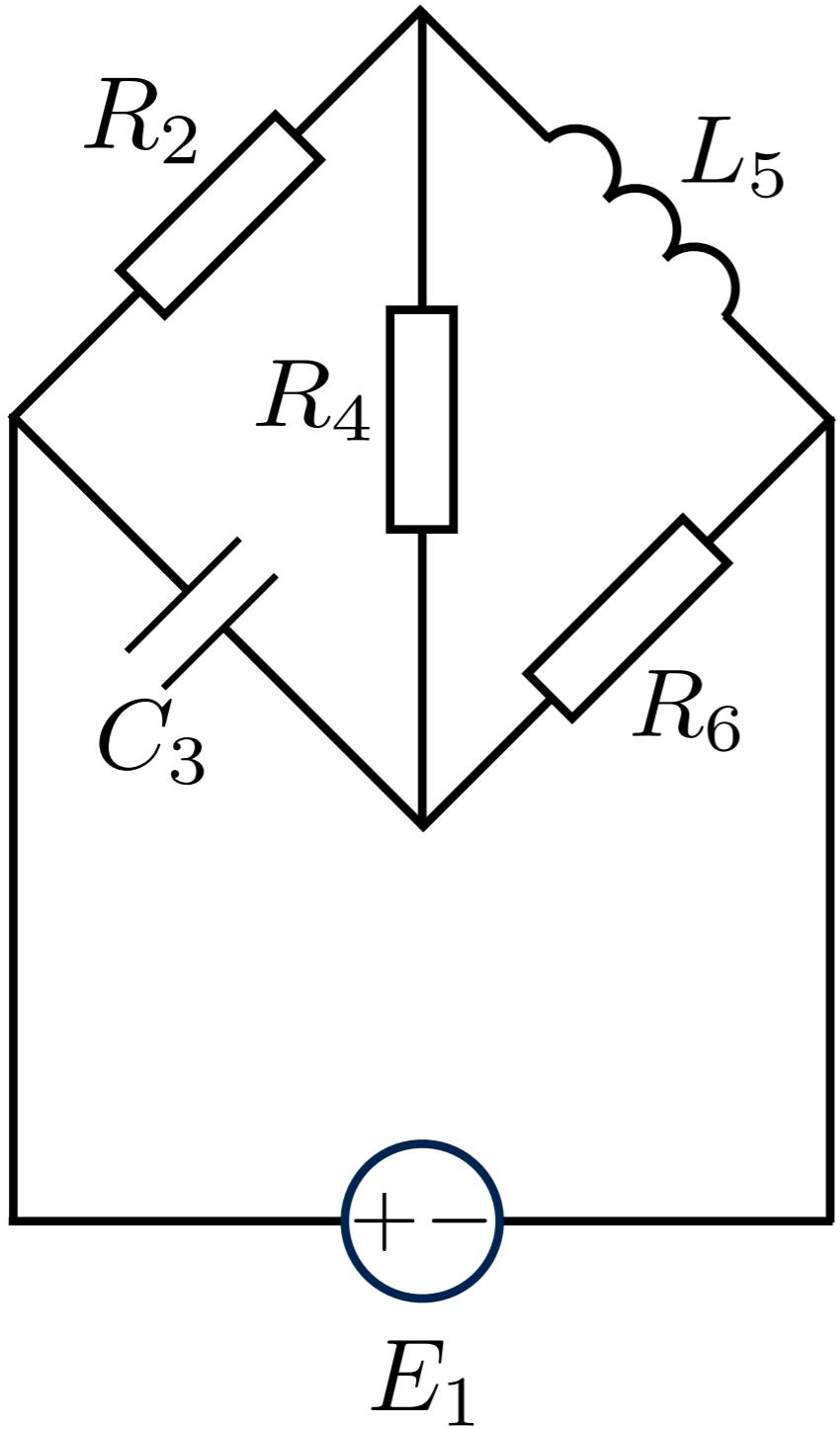
逆行列を作る

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1*4 - 2*3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

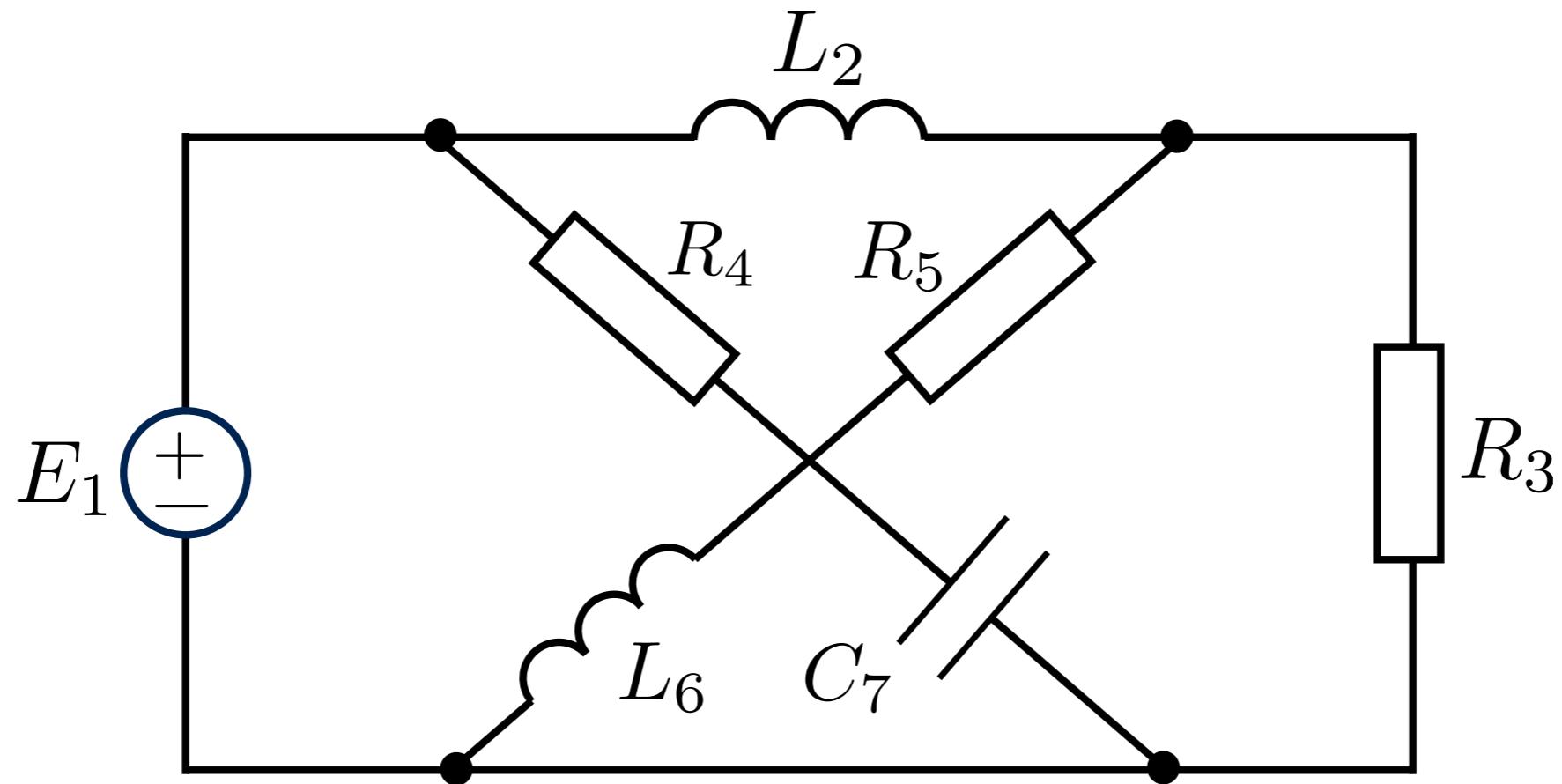
逆行列にその行列をかけると1になる

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



接続行列を書く



接続行列を書く

2時限目のまとめ

1. 接続行列
2. 接続電位方程式

3 時限目

ところが
CやLがある場合にはうまくいかない

インダクタ :

$$v = L \frac{di}{dt}$$

この時にうまい方法がある（差分化する）

$$\frac{v^{m+1} + v^m}{2} = L \frac{i^{m+1} - i^m}{\Delta t}$$

$$v^{m+1} - \frac{2L}{\Delta t} i^{m+1} = -(v^m + \frac{2L}{\Delta t} i^m)$$

新しい電位と電流 わかっている電位と電流

キヤパシタ：

$$C \frac{dv}{dt} = i$$

$$C \frac{v^{m+1} - v_m}{\Delta t} = \frac{i^{m+1} + i^m}{2}$$

$$v^{m+1} - \frac{\Delta t}{2C} i^{m+1} = -(-v^m - \frac{\Delta t}{2C} i^m)$$

だったら

抵抗

$$v = Ri$$

$$\frac{v^{m+1} + v^m}{2} = R \frac{i^{m+1} + i^m}{2}$$

$$v^{m+1} - Ri^{m+1} = -(v^m - Ri^m)$$

電圧電源

$$v = e$$

$$v^{m+1} = -v^m + (e^{m+1} + e^m)$$

すべてをまとめると次のように書ける

$$v^{m+1} - Zi^{m+1} = -(\epsilon v^m - \delta Zi^m) + e^{m+1} + e^m$$

抵抗 $Z = R \quad \epsilon = 1 \quad \delta = 1$

インダクタ $Z = \frac{2L}{\Delta t} \quad \epsilon = 1 \quad \delta = -1$

キャパシタ $Z = \frac{\Delta t}{2C} \quad \epsilon = -1 \quad \delta = 1$

電圧電源 $Z = 0 \quad \epsilon = 1 \quad \delta = 1$

KCLの関係式

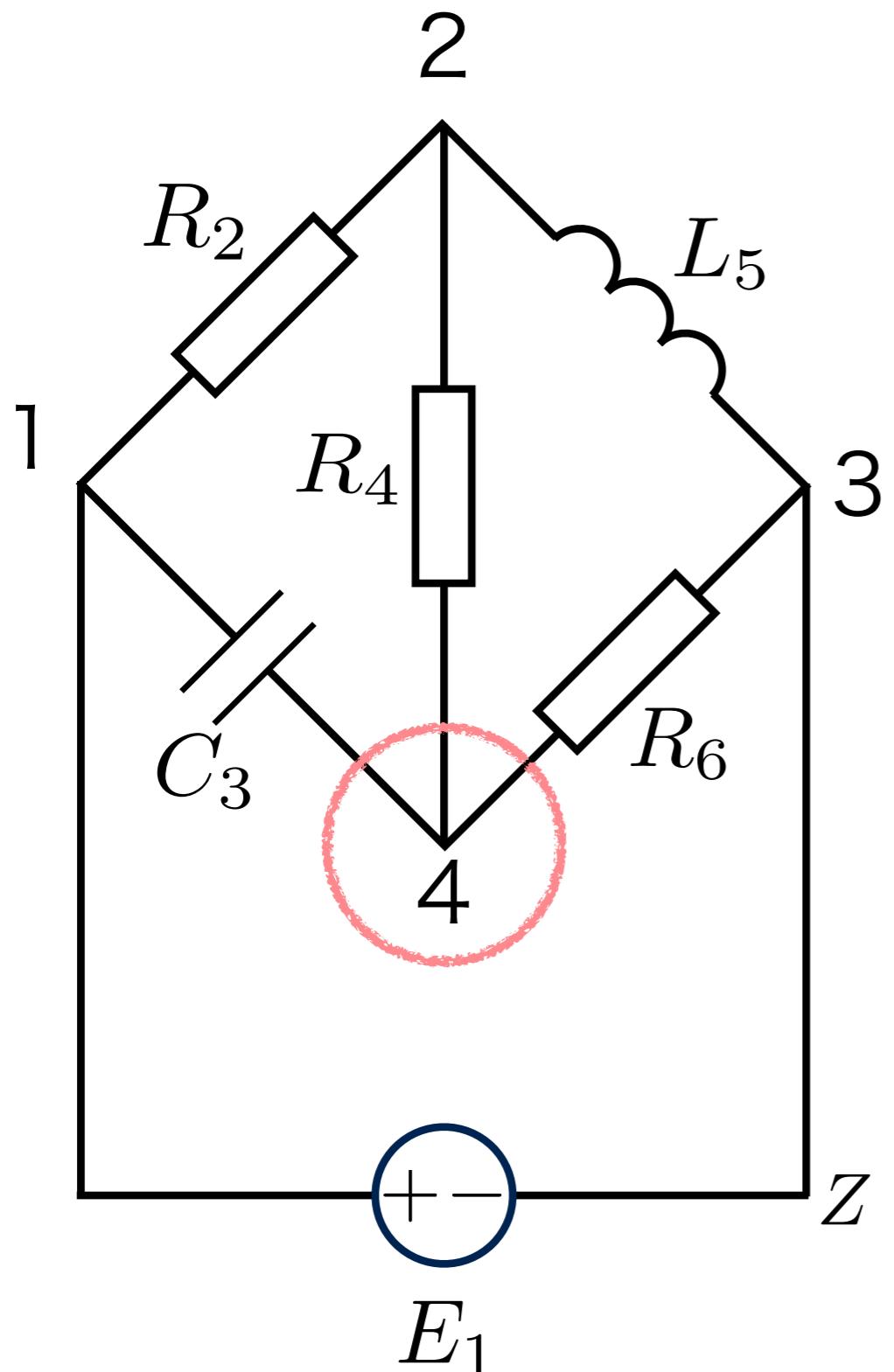
$$AI^{m+1} = 0$$

$$v^{m+1} - Zi^{m+1} = -(\epsilon v^m - \delta Zi^m) + e^{m+1} + e^m$$

一般化された接続電位方程式

$$\begin{pmatrix} A^T & -Z \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{m+1} \\ I^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon A^T & \delta Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^m \\ I^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E^{m+1} + E^m \\ -A_J J^{m+1} \end{pmatrix}$$

解答



接続行列を書く

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) & U_4 = 0 \end{array}$$

インピーダンス行列

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t / C_3 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2L_5 / \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{pmatrix}$$

接続電位方程式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{m+1} \\ \mathbf{I}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon \mathbf{A}^T & \delta \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^m \\ \mathbf{I}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{m+1} + \mathbf{E}^m \\ -\mathbf{A}_J \mathbf{J}^{m+1} \end{pmatrix}$$

インダクタ

$$Z = \frac{2L}{\Delta t} \quad \epsilon = 1 \quad \delta = -1$$

キャパシタ

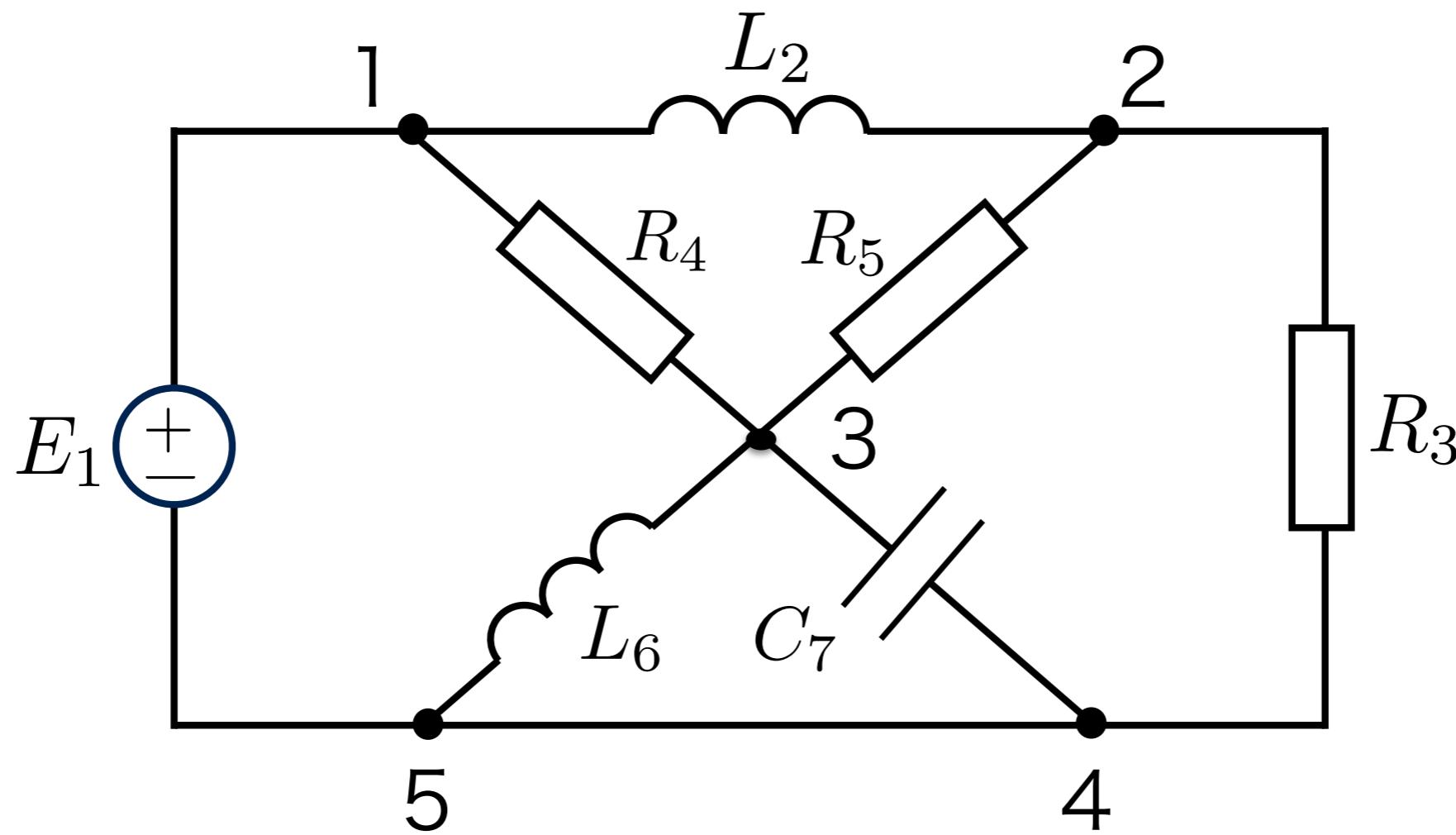
$$Z = \frac{\Delta t}{2C} \quad \epsilon = -1 \quad \delta = 1$$

電圧電源

$$Z = 0 \quad \epsilon = 1 \quad \delta = 1$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

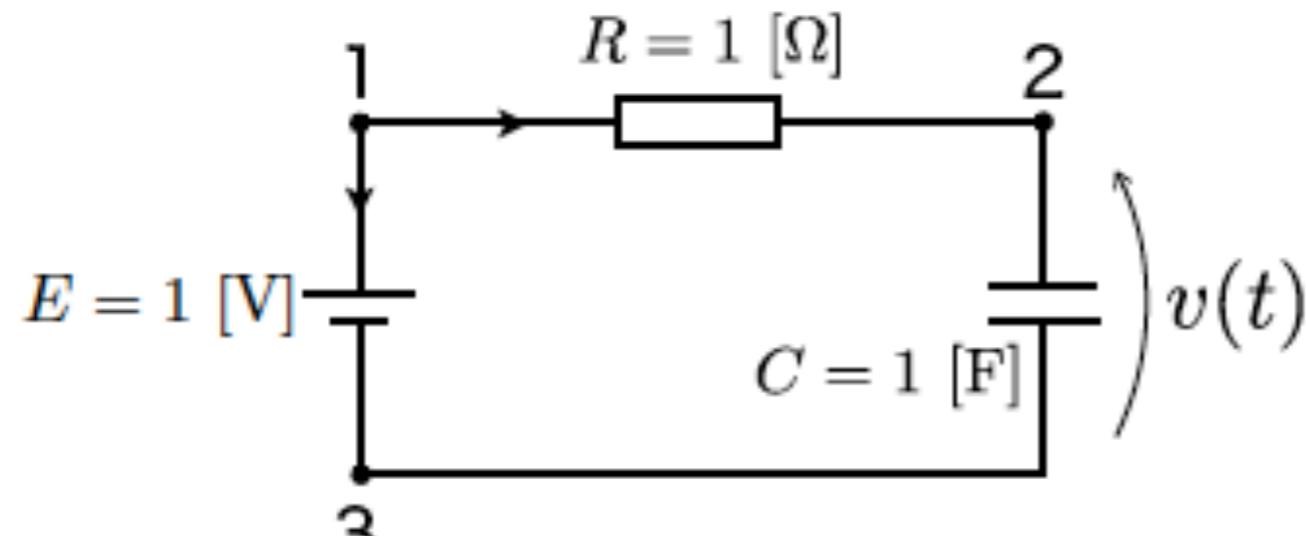
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}$$



接続行列

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix} \right)$$

簡単な回路の計算結果



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U_3 = 0$$

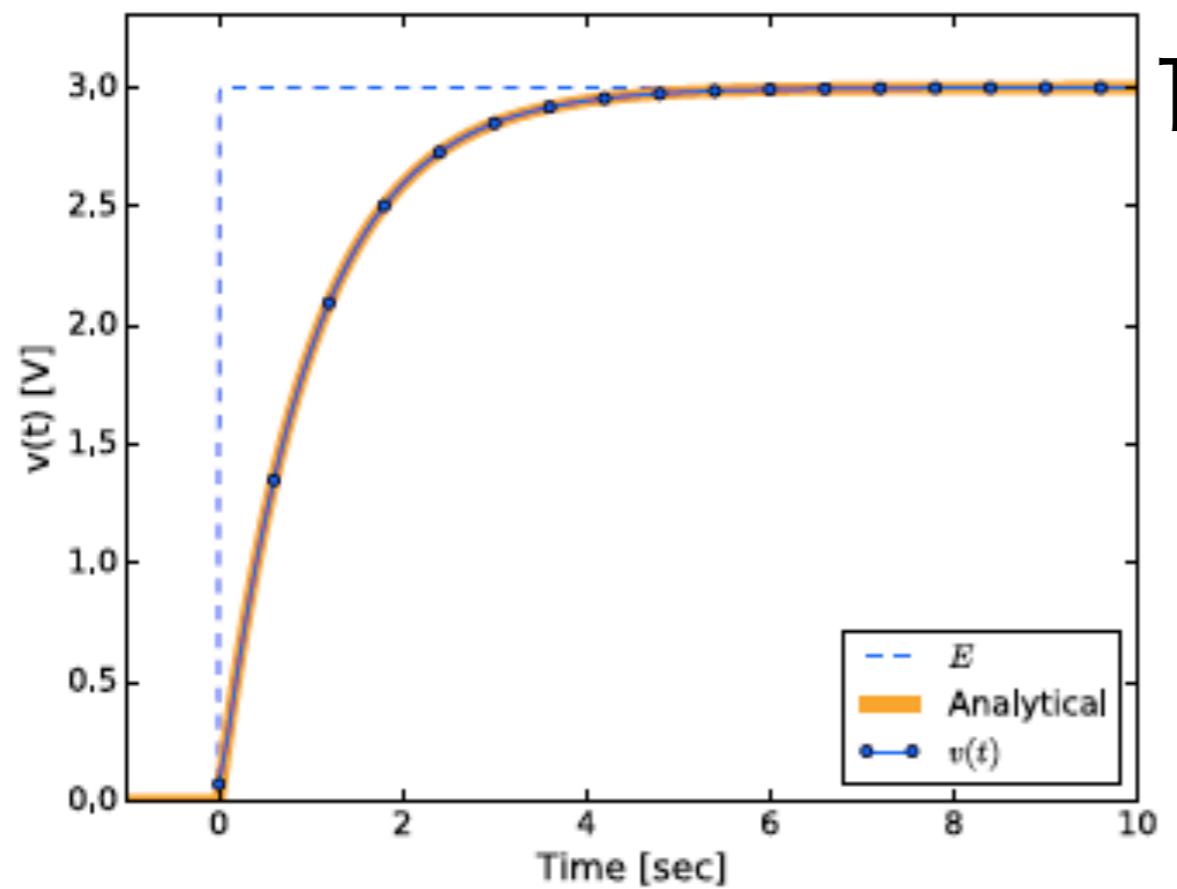


図 6.10: 図 6.9 の RC 直列回路の $t > 0$ におけるキャパシタ電圧の時間依存性を式 (6.44) を用いて解いた結果。 $\Delta t = 0.1 \text{ [s]}$ としている。

Tutorial7.py
figure_1.png

(次回には仲間の計算結果をお見せします)

第7章

電位と電流の基礎方程式である マクスウェルの方程式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon} \quad \text{クーロンの法則}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{単磁荷はない}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{ファラデーの法則}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j} \quad \text{アンペールの法則}$$

$$\epsilon = 8.854187817 \times 10^{-12} [\text{F/m}]$$

$$\mu = 1.2566370614 \times 10^{-6} [\text{H/m}]$$

力学

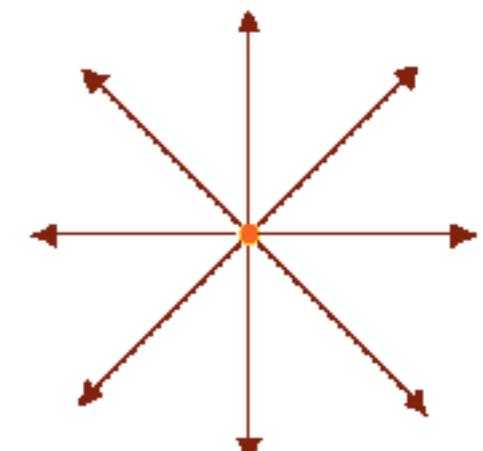
$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \vec{a} = \frac{d^2 \vec{a}}{dx^2}$$

微分のベクトルが入っているのが難しくしている

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

内積(divergence)

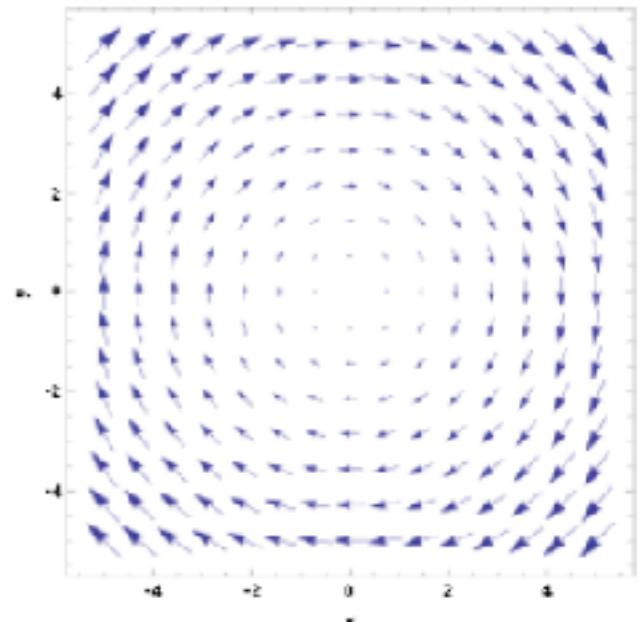
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$



$$\vec{E} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y$$

外積(rotation)

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$



ポテンシャルの導入
スカラー・ポテンシャル U
ベクトル・ポテンシャル A

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{宿題}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0$$

$$\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\vec{\nabla} U \quad \text{宿題}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu \vec{j}$$

$$-\vec{\nabla}^2 U - \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial U}{\partial t} \right) = \mu \vec{j}$$

ローレンツ条件

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

ポテンシャルが従うべき方程式

$$-\vec{\nabla}^2 U + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{q}{\varepsilon}$$

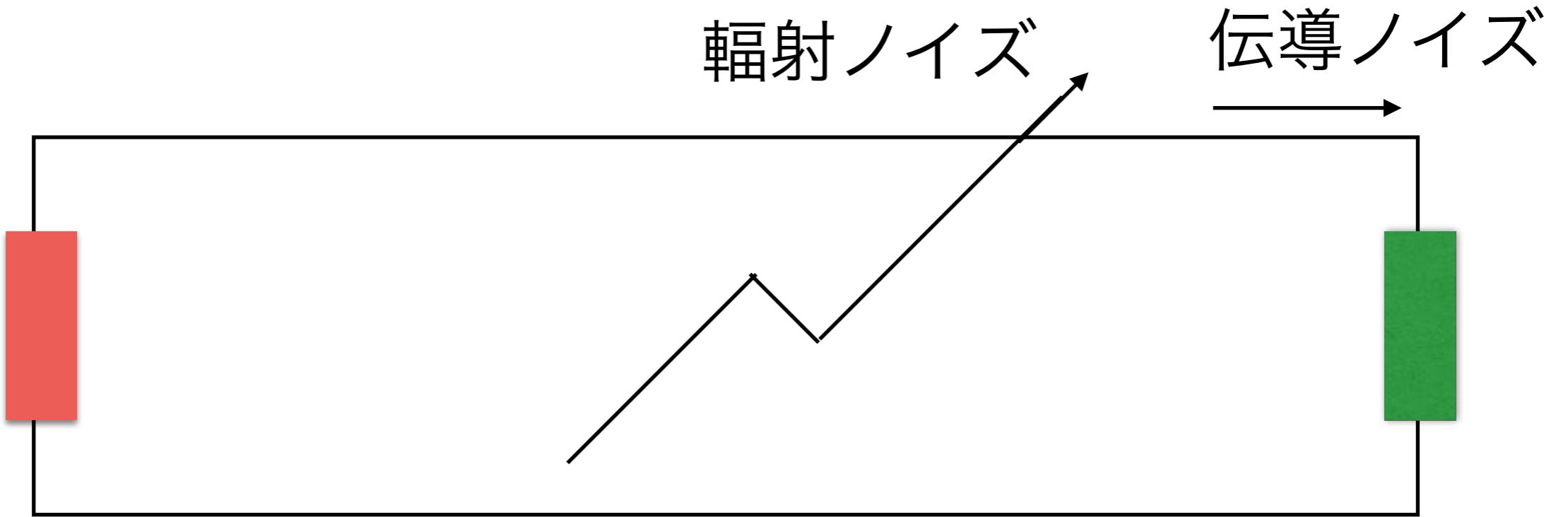
$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{j}$$

まとめ
接続方程式を作った
接続電位方程式を作った
マクスウェル方程式を導入した
ポテンシャルを導入した

宿題

- 1。ゲージ不变性のところを読む
- 2。クーロンの法則を導出する
- 3。アンペールの法則を導出する

4 時限目
マクスウェルの方程式
ポテンシャルで表現した
伝送線路方程式を導出する
(ヘビサイドの式：電気回路の基本方程式)



- 1。我々の理論はヘビサイド伝送線路理論(1886)
に依拠している (現象論)
- 2。それが不完全であることでノイズが発生している
(計算と現実が一致しない)
- 3。マクスウェルの方程式から正確な伝送線路理論を作る
- 4。ヘビサイド理論をいくつかの近似をすることで導出する
- 5。その近似の一つ一つがノイズ源である

$$-\vec{\nabla}^2 U + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{q}{\epsilon}$$

マクスウェルの方程式を
ポテンシャルで書いた式
(波動の方程式)

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{j}$$

(輻射ノイズを無視)

$$-\vec{\nabla}^2 U(\vec{r}) = \frac{q(\vec{r})}{\epsilon}$$

時間の項をおとす (近似)

クーロンの法則

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int d^3 r' \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}) = \mu \vec{j}(\vec{r})$$

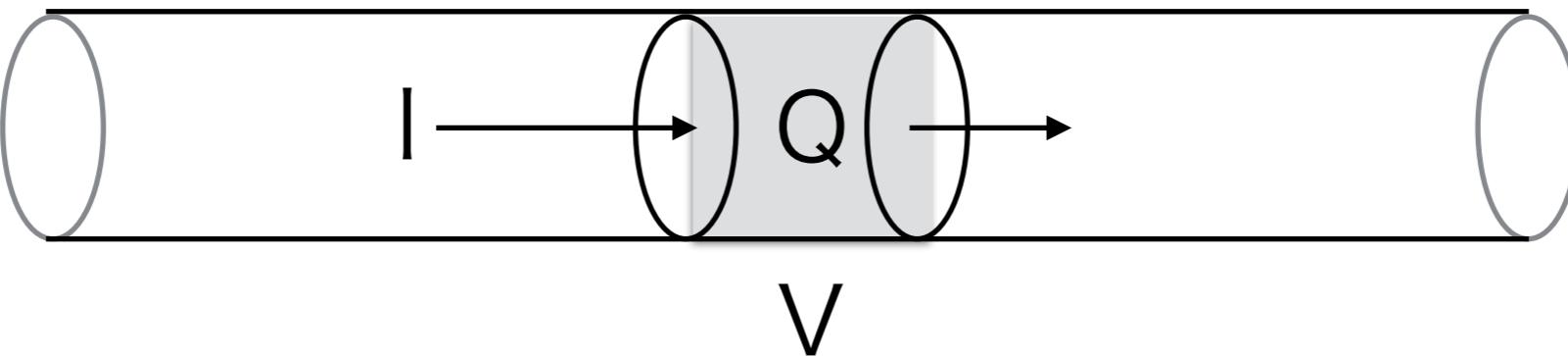
時間の項をおとす

アンペールの法則

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(ここまでMaxwellの遺産を忠実に使った)

電線で成り立つべき方程式



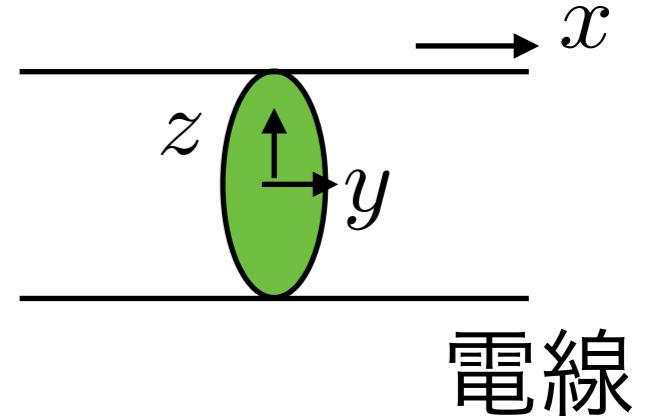
$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial I(x, t)}{\partial x}$$

連續の方程式

$$-\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, t)}{\partial t} = \mathcal{R}I(x, t)$$

オームの法則
 $\vec{E} = R\vec{I}$

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int d^3r' \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



$$Q(x') = \int dy' dz' q(x', y', z') \quad \text{長さあたりの電荷}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + \tilde{a}^2}} = \int dy' dz' \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + y'^2 + (a - z')^2}}$$

\tilde{a} 幾何学的平均距離

$$U(x, 0, a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int dx' \frac{Q(x')}{\sqrt{(x - x')^2 + \tilde{a}^2}}$$

$$A(x, 0, a) = \frac{\mu}{4\pi} \int dx' \frac{I(x')}{\sqrt{(x - x')^2 + \tilde{a}^2}}$$

伝送線路理論の4つの基本方程式

$$U(x, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int dx' \frac{Q(x', t)}{\sqrt{(x - x')^2 + \tilde{a}^2}}$$

スカラーポテンシャル

$$A(x, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int dx' \frac{I(x', t)}{\sqrt{(x - x')^2 + \tilde{a}^2}}$$

ベクトルポテンシャル

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial I(x, t)}{\partial x}$$

電荷保存の式

$$-\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, t)}{\partial t} = \mathcal{R}I(x, t)$$

オームの法則

未知数：

U, A, I, Q

積分と微分が入っている方程式
(偏微分積分方程式)

大胆な近似（キルヒ霍ッフ、ヘビサイド）

$$U(x, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int dx' \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + \tilde{a}^2}} Q(x', t) = PQ(x, t)$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = P \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t}$$

$$P = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2l}{a}$$

P : 電位係数

L : 誘導係数

キルヒ霍ッフが書いた式

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = -P \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} \quad (1857)$$

ヘビサイドの方程式

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - RI(x, t) \quad \text{に近い！！} \quad (1886)$$

ヘビサイドの伝送線路理論

$U_1 \quad I_1$

2本線

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = -P_{11} \frac{\partial I_1}{\partial x} - P_{12} \frac{\partial I_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = -P_{21} \frac{\partial I_1}{\partial x} - P_{22} \frac{\partial I_2}{\partial x}$$

$U_2 \quad I_2$

$$U_d = U_1 - U_2 \qquad \qquad I_d = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

$$U_s = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) \qquad \qquad I_s = I_1 + I_2$$

差のモードと和のモード

(ヘビサイドは伝送には2本線が必要である)

差のモードと和のモードで書く

$$\frac{\partial U_d}{\partial t} = -P_d \frac{\partial I_d}{\partial x} - P_{ds} \frac{\partial I_s}{\partial x} \quad \text{宿題}$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} = -P_{sd} \frac{\partial I_d}{\partial x} - P_s \frac{\partial I_s}{\partial x}$$

$$P_d = P_{11} + P_{22} - 2P_{12} \quad P_d = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{a_{12}^2}{a_1 a_2}$$

$$P_{ds} = P_{11} - P_{22} \quad P_{ds} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(\ln \frac{2l}{a_{ij}} - 1 \right)$$

線の半径が等しい時には結合が切れる

ヘビサイドの2本線伝送線路方程式

$$\frac{\partial U_d}{\partial t} = -P_d \frac{\partial I_d}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial I_d}{\partial x} = -C_d \frac{\partial U_d}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial x} = -L_d \frac{\partial I_d}{\partial t} - R_d I_d \quad C_d = 1/P_d$$

パイソン授業：この方程式を解く

$$L_d = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{a_{12}}{a_1} \quad C_d = \frac{1}{\frac{1}{\pi \varepsilon} \ln \frac{a_{12}}{a_1}}$$

ヘビサイドの方程式（伝送線路の基本方程式）は
電線の太さが等しい時に成り立つ式である

それ以外の時（同軸ケーブル、ベタアースなど）には
必然的にノイズが生じる

$$P = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2l}{a} \text{ の導出}$$

$$\int dx' \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + a^2}} = \ln \left((x' - x) + \sqrt{(x-x')^2 + a^2} \right)$$

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon} (\ln((l-x) + \sqrt{(x-l)^2 + a^2}) - \ln((-x) + \sqrt{(x)^2 + a^2}))$$

$$\begin{aligned} & \int dx \ln \left((l-x) + \sqrt{(l-x)^2 + a^2} \right) \\ &= (x-l) \ln \left((l-x) + \sqrt{(l-x)^2 + a^2} \right) + \sqrt{(l-x)^2 + a^2} \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{l} \int_0^l P(x) \quad \text{これも近似 (TEM近似)}$$

$$P = \frac{1}{l} (a + l \ln(l + \sqrt{l^2 + a^2}) - \sqrt{l^2 + a^2} - a - l \ln(-l + \sqrt{l^2 + a^2}) + \sqrt{l^2 + a^2})$$

$$P = \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{-l + \sqrt{l^2 + a^2}} \sim 2 \ln \frac{2l}{a} \quad a \ll l \quad P = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2l}{a}$$

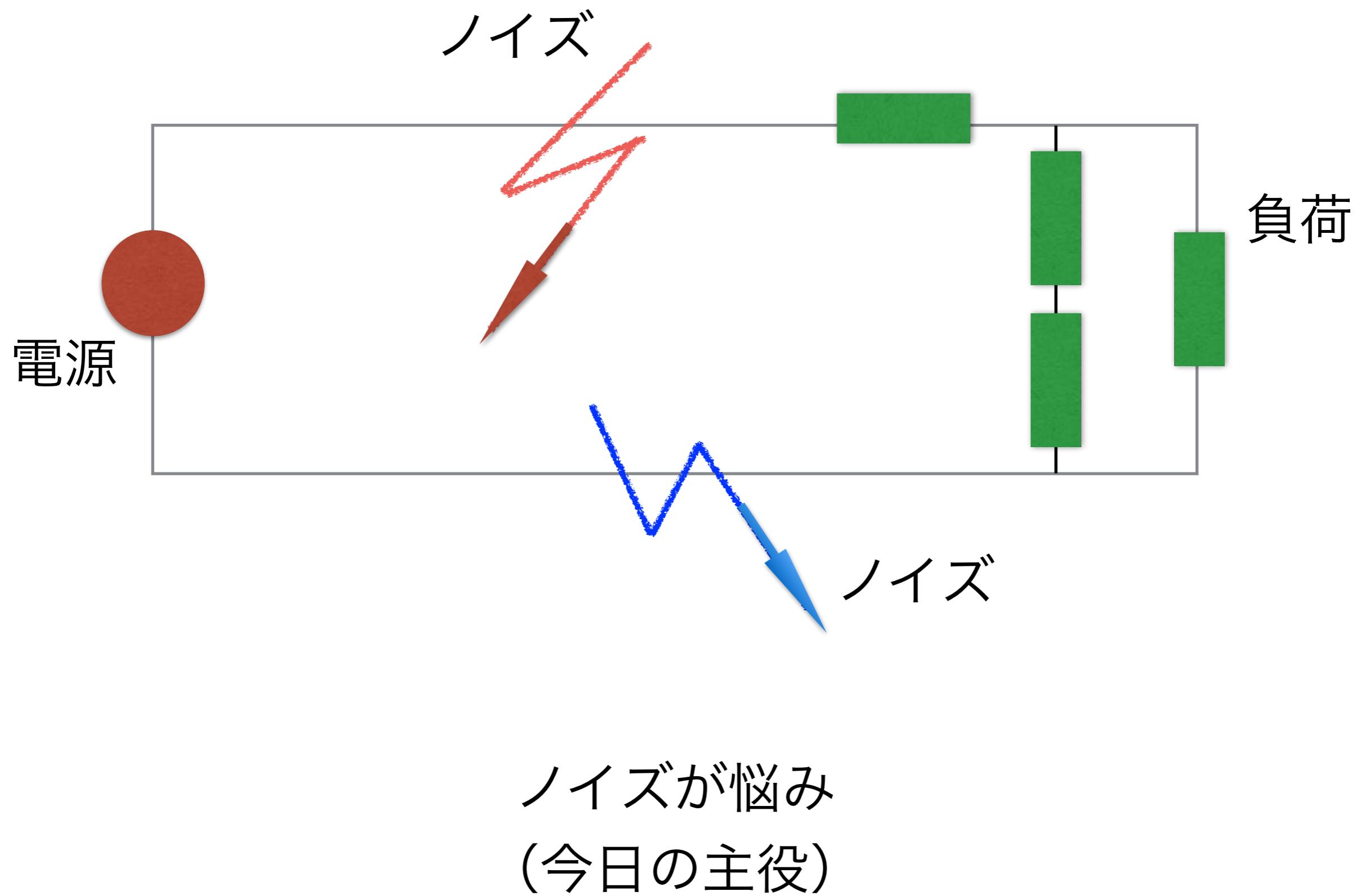
4 時限日のまとめ
伝送線路理論を輻射項なしで作った
2本線回路でヘビサイドの式を導出した
たくさんの近似を行った
全てがノイズ源

- 1。線の太さが等しくないこと
- 2。TEM近似で捨てた部分
- 3。積分の一部を考慮したそれ以外
- 4。輻射項を捨てた
- 5。環境の効果 (次の講義)

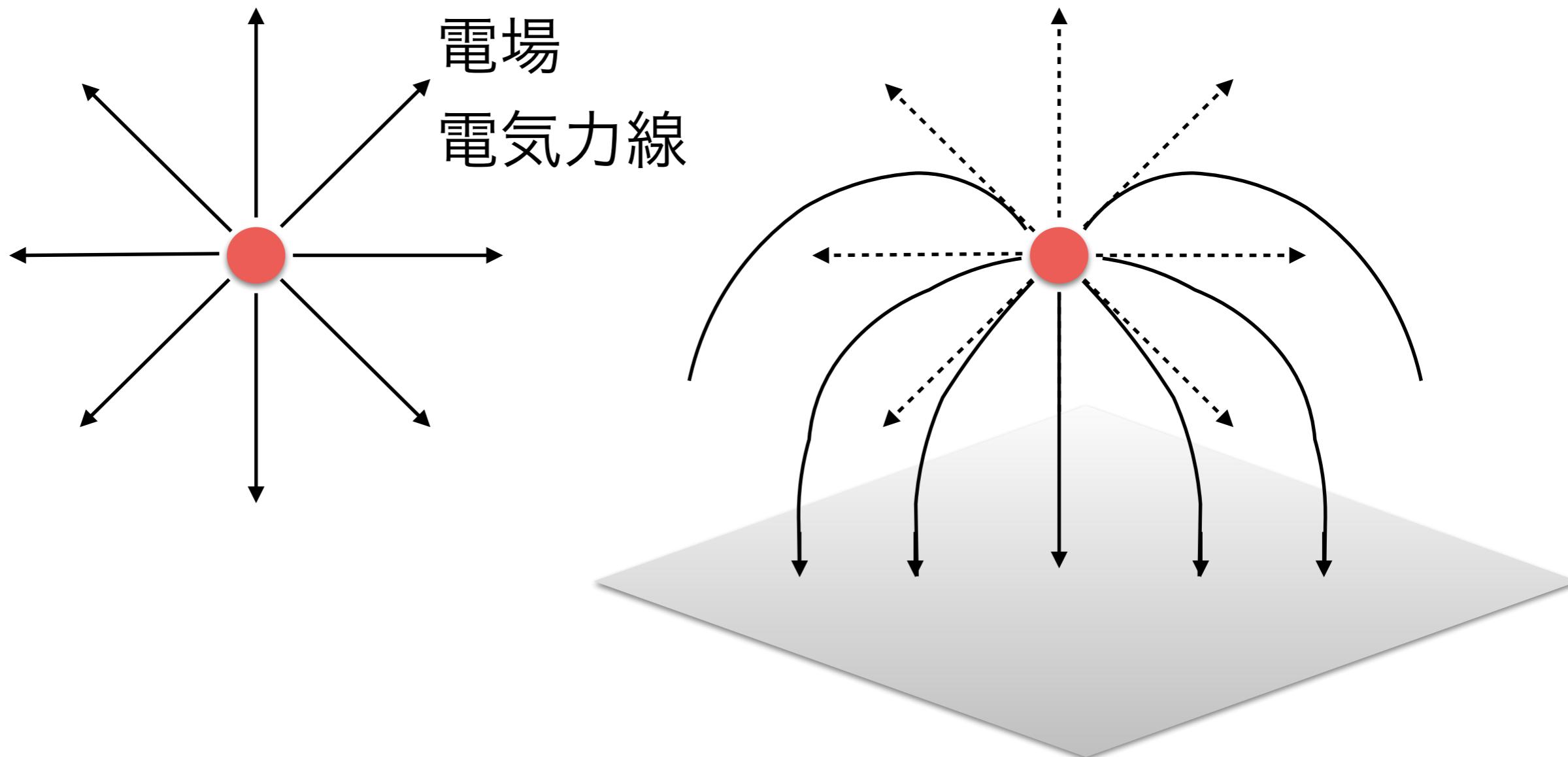
5 時限目

前回はヘビサイドの式である
電気回路の基本方程式の導出した
2本線回路に入り込む環境からのノイズ
(コモンモードの存在)

3本線対称回路
(今日が最後の授業)

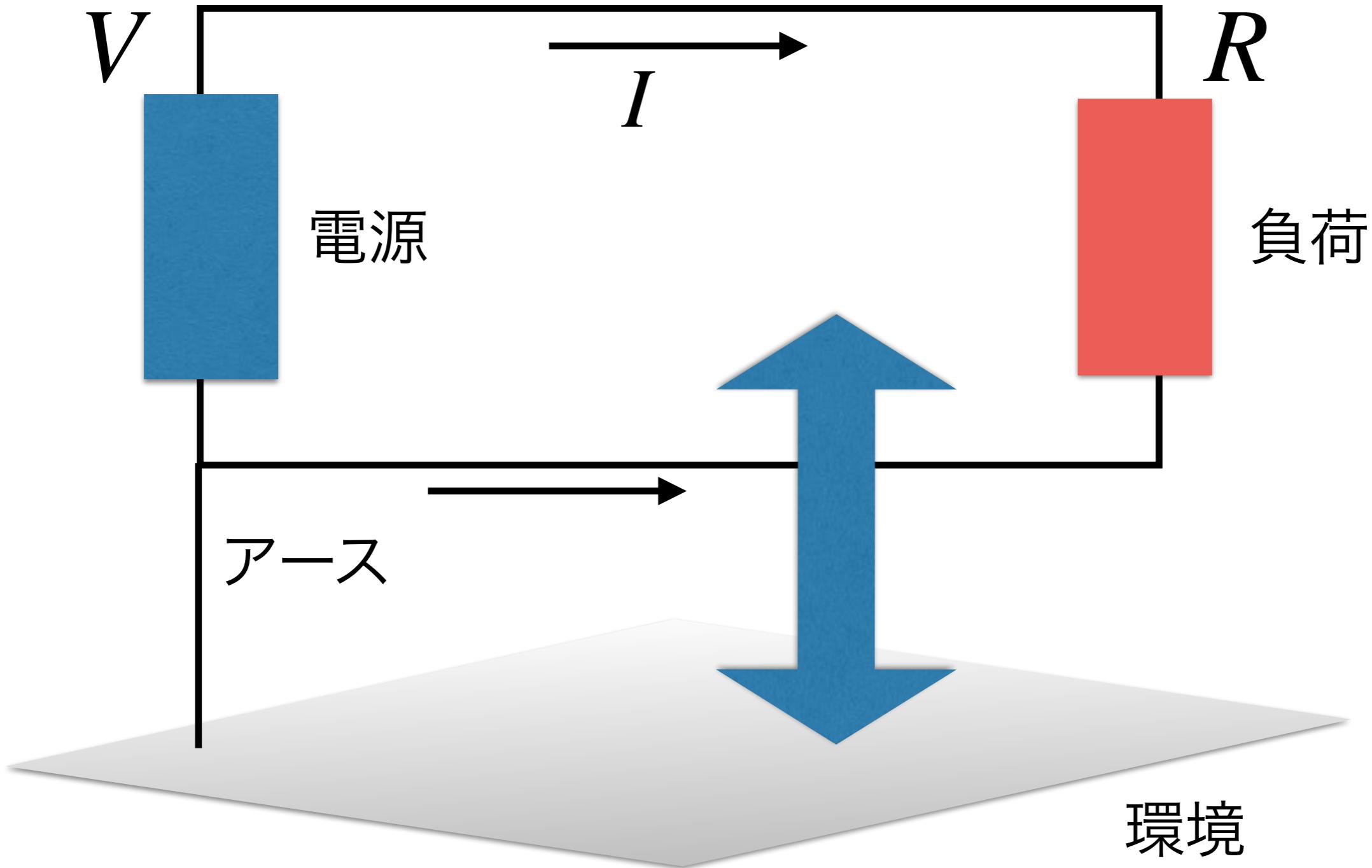


電磁ノイズの物理

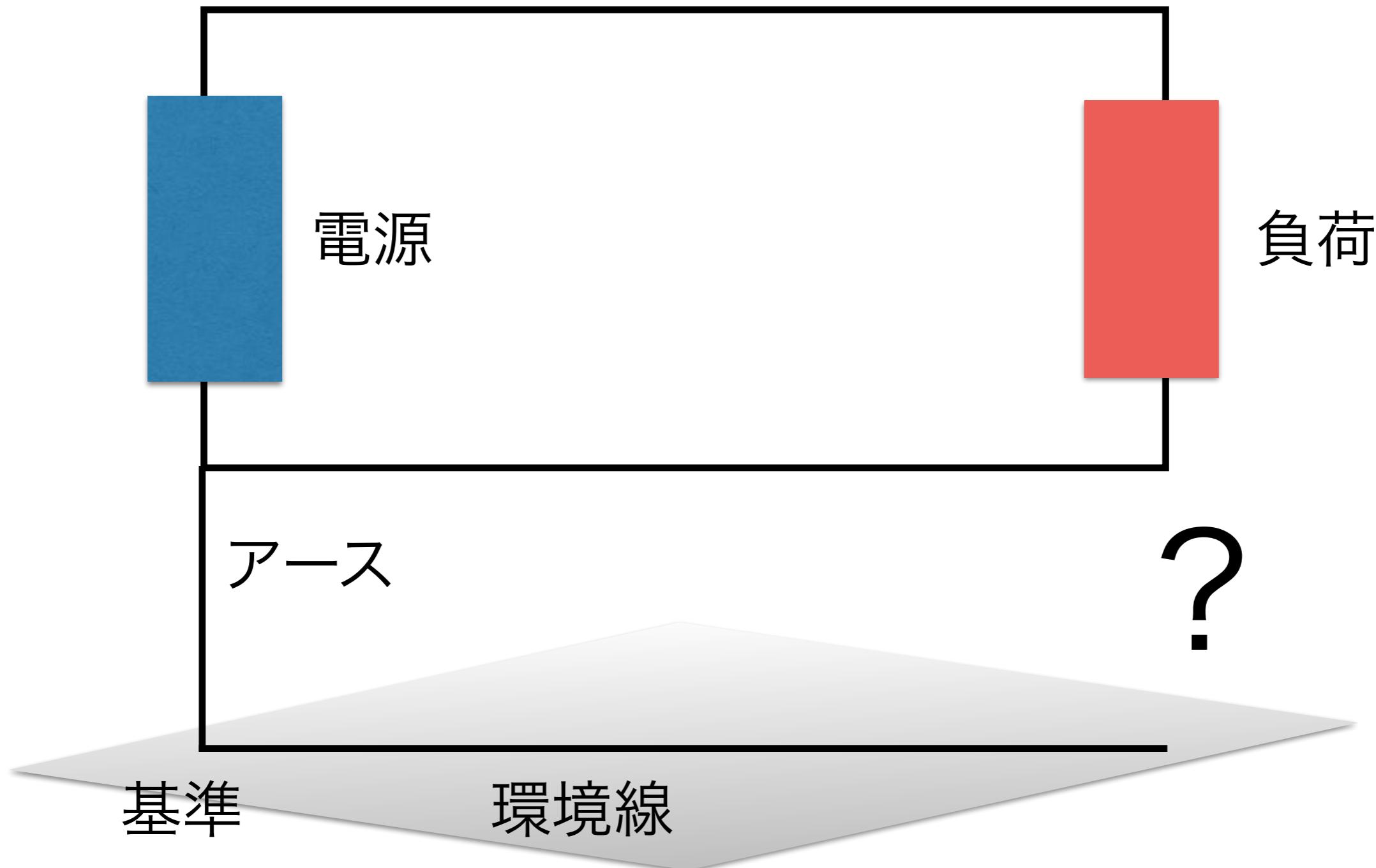


電荷は環境に影響を与えるし、環境から影響を受ける

電気回路と環境



良く見かける普通の回路



環境の効果を考える

3本線回路

ヘビサイドの2本線伝送線路方程式（2本線の問題）

$$\frac{\partial U_d}{\partial t} = -P_d \frac{\partial I_d}{\partial x}$$



$$\frac{\partial I_d}{\partial x} = -C_d \frac{\partial U_d}{\partial t}$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial x} = -L_d \frac{\partial I_d}{\partial t} - R_d I_d$$

$$C_d = 1/P_d$$

$$L_d = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{a_{12}}{a_1}$$

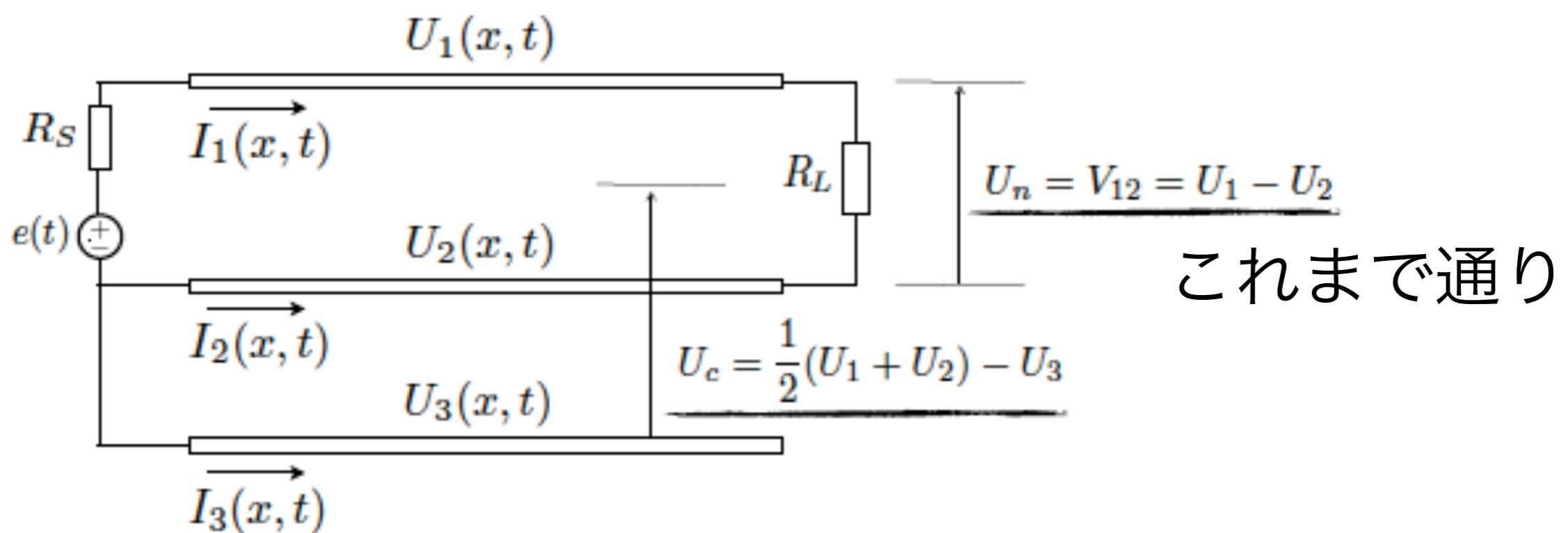
$$C_d = \frac{1}{\frac{1}{\pi\varepsilon} \ln \frac{a_{12}}{a_1}}$$

3本線回路（第11章）

$$\frac{\partial U_i(x, t)}{c \partial t} = - \sum_{j=1}^3 Z_{ij} \frac{\partial I_j(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U_i(x, t)}{\partial x} = - \sum_{j=1}^3 Z_{ij} \frac{\partial I_j(x, t)}{c \partial t} - \mathcal{R}_i I_i(x, t)$$

$$Z_{ij} = P_{ij}/c = L_{ij} \times c$$



ノーマルモードとコモンモード

$$U_n = U_1 - U_2$$

$$I_n = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

ノーマルモード
(ヘビサイドが扱ったモード)

$$U_{12} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)$$

サムモード (和のモード)

$$I_{12} = I_1 + I_2$$

2本を総体とみなす

$$U_c = U_{12} - U_3 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) - U_3$$

$$I_c = \frac{1}{2}(I_{12} - I_3) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2 - I_3)$$

コモンモード

コモンモードは環境の効果 (ノイズモード)

ノーマルモードとコモンモードで書いた伝送方程式

$$\frac{\partial U_n(x, t)}{c\partial t} = -\mathcal{Z}_n \frac{\partial I_n(x, t)}{\partial x} - \mathcal{Z}_{nc} \frac{\partial I_c(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U_c(x, t)}{c\partial t} = -\mathcal{Z}_{cn} \frac{\partial I_n(x, t)}{\partial x} - \mathcal{Z}_c \frac{\partial I_c(x, t)}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_n(x, t)}{\partial x} &= -\mathcal{Z}_n \frac{\partial I_n(x, t)}{c\partial t} - \mathcal{Z}_{nc} \frac{\partial I_c(x, t)}{c\partial t} \\ &\quad - \mathcal{R}_n I_n(x, t) - \mathcal{R}_{nc} I_c(x, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_c(x, t)}{\partial x} &= -\mathcal{Z}_{cn} \frac{\partial I_n(x, t)}{c\partial t} - \mathcal{Z}_c \frac{\partial I_c(x, t)}{c\partial t} \\ &\quad - \mathcal{R}_{cn} I_n(x, t) - \mathcal{R}_c I_c(x, t) \end{aligned}$$

(練習問題にしてある)

ノーマルモード・コモンモードの式の導出

$$U_i = - \sum_{i=1}^3 Z_{ij} I_j$$

(微分は簡便性の
ために落とす)

$$U_1 - U_2 = -(Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3) + (Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3)$$

$$= \frac{1}{2}(-Z_{11} + Z_{21} - Z_{12} + Z_{22})(I_1 + I_2) + \frac{1}{2}(-Z_{11} + Z_{21} + Z_{21} - Z_{22})(I_1 - I_2) \\ - (Z_{13} - Z_{23})I_3$$

$$= -(Z_{11} + Z_{22} - 2Z_{12})\frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(Z_{11} - Z_{22}) + (Z_{13} - Z_{23})\right)(I_1 + I_2 + I_3)$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(Z_{11} - Z_{22}) - (Z_{13} - Z_{23})\right)(I_1 + I_2 - I_3)$$

(やって見てください)

特性インピーダンス

$$\mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_{11} + \mathcal{Z}_{22} - 2\mathcal{Z}_{12}$$

$$\mathcal{Z}_c = \frac{1}{4}(\mathcal{Z}_{11} + 2\mathcal{Z}_{12} + \mathcal{Z}_{22}) - (\mathcal{Z}_{13} + \mathcal{Z}_{23}) + \mathcal{Z}_{33}$$

$$\mathcal{Z}_{nc} = \mathcal{Z}_{cn} = \frac{1}{2}(\mathcal{Z}_{11} - \mathcal{Z}_{22}) - (\mathcal{Z}_{13} - \mathcal{Z}_{23})$$

抵抗

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$$

$$\mathcal{R}_c = \frac{1}{4}(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) + \mathcal{R}_3$$

$$\mathcal{R}_{nc} = \mathcal{R}_{cn} = \frac{1}{2}(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)$$

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left(\ln \frac{2l}{\tilde{a}_{ij}} - 1 \right) \quad \rightarrow \quad Z_{ij} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\ln \frac{2l}{a_{ij}} - 1 \right)$$

ノーマルモードの特性インピーダンス

$$Z_n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{a_{12}}{a_1}$$

ノーマルモードとコモンモードの結合

$$Z_{nc} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{a_2 a_{13}^2}{a_1 a_{23}^2}$$

線の太さが等しい : 線間の距離が等しい :
線の性質が等しい

$$a_1 = a_2$$

$$a_{13} = a_{23}$$

結合が切れる

$$R_1 = R_2$$

結合がない場合の式=ヘビサイドの伝送線路理論式

$$\frac{\partial U_n(x, t)}{c\partial t} = -\mathcal{Z}_n \frac{\partial I_n(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial U_n(x, t)}{\partial x} = -\mathcal{Z}_n \frac{\partial I_n(x, t)}{c\partial t} - \mathcal{R}_n I_n(x, t)$$

$$\frac{\partial I_d}{\partial x} = -C_d \frac{\partial U_d}{\partial t}$$

$$C_d = 1/P_d$$

$$\frac{\partial U_d}{\partial x} = -L_d \frac{\partial I_d}{\partial t} - R_d I_d$$

3本線対称回路のみがノイズを削減でき、
設計通りの回路の働きをする。

伝送線路の数値計算方法（第10章）

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial ct} = -Z \frac{\partial I(x, t)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = -Z \frac{\partial I(x, t)}{\partial ct} - RI(x, t)$$

行列とベクトルと思う（多導体）

FDTD法

微分は中心点で定義する（数値計算の対称性）

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x/2) - f(x - \Delta x/2)}{\Delta x}$$

$$\frac{V(x, t + \Delta t/2) - V(x, t - \Delta t/2)}{c\Delta t} = -Z \frac{I(x + \Delta x/2, t) - I(x - \Delta x/2, t)}{\Delta x}$$

差分化

$$x = k\Delta x$$

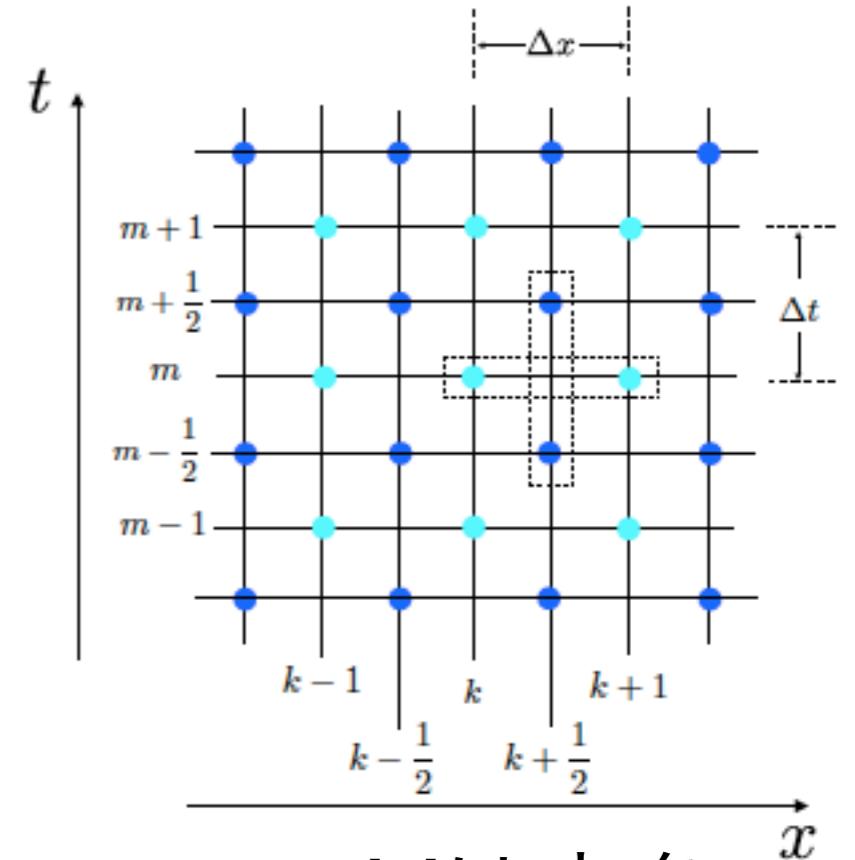
$$t = m\Delta t$$

$$t \rightarrow t + \Delta t/2$$

V を時間空間の整数点で定義する
 I を時間空間の半整数点で定義する

$$\frac{V_k^{m+1} - V_k^m}{c\Delta t} = -Z \frac{I_{k+1/2}^{m+1/2} - I_{k-1/2}^{m+1/2}}{\Delta x}$$

$$\frac{V_{k+1}^m - V_k^m}{\Delta x} = -Z \frac{I_{k+1/2}^{m+1/2} - I_{k+1/2}^{m-1/2}}{c\Delta t} - R \frac{I_{k+1/2}^{m+1/2} + I_{k+1/2}^{m-1/2}}{2}$$



V は空色

I は青色

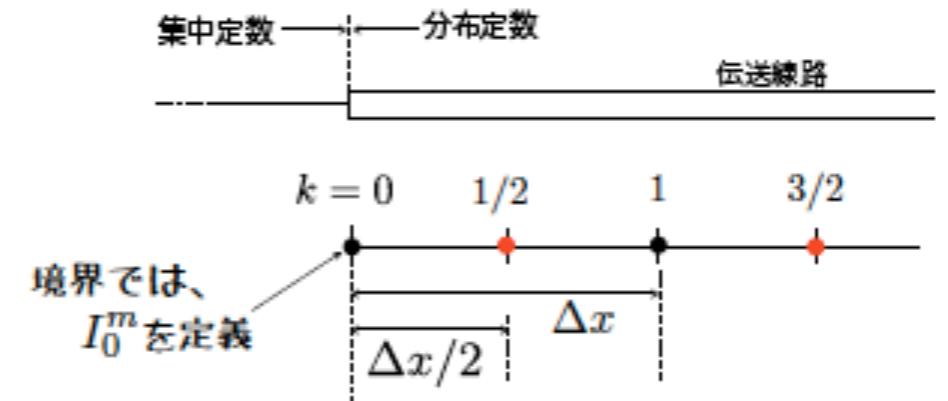


$$V_k^{m+1} = V_k^m - Z \frac{c\Delta t}{\Delta x} (I_{k+1/2}^{m+1/2} - I_{k-1/2}^{m+1/2})$$

境界のところ

$$k = 0$$

$$V_0^{m+1} = V_0^m - Z \frac{c\Delta t}{\Delta x} (I_{1/2}^{m+1/2} - I_{-1/2}^{m+1/2})$$



$I_{-1/2}^{m+1/2}$ が現れてうまくいかない

窮すれば通ず

強烈にうまい方法がある

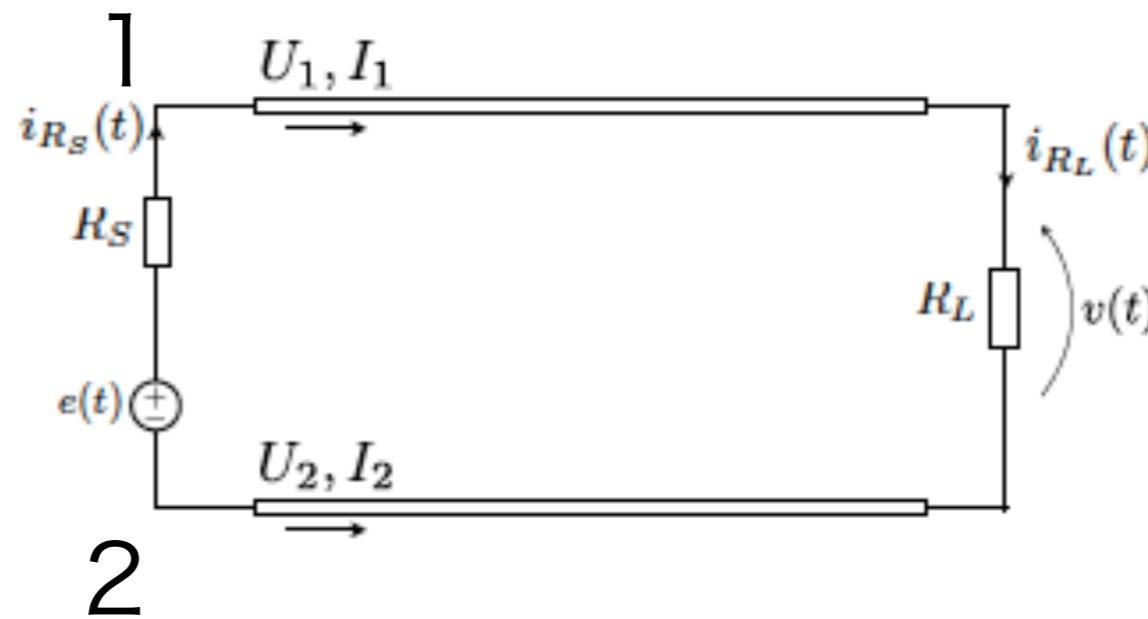
$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (I_{1/2}^{m+1/2} - I_{-1/2}^{m+1/2}) &\rightarrow \frac{1}{\Delta x/2} (I_{1/2}^{m+1/2} - I_0^{m+1/2}) \\ &\rightarrow \frac{1}{\Delta x} (2I_{1/2}^{m+1/2} - (I_0^{m+1} + I_0^m)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_0^{m+1} &= RI_0^{m+1} + E^{m+1} \\ &\quad (\text{オームの法則}) \end{aligned}$$

V_0^{m+1}
 I_0^{m+1} が未知数

集中定数回路と分布定数回路の境界条件

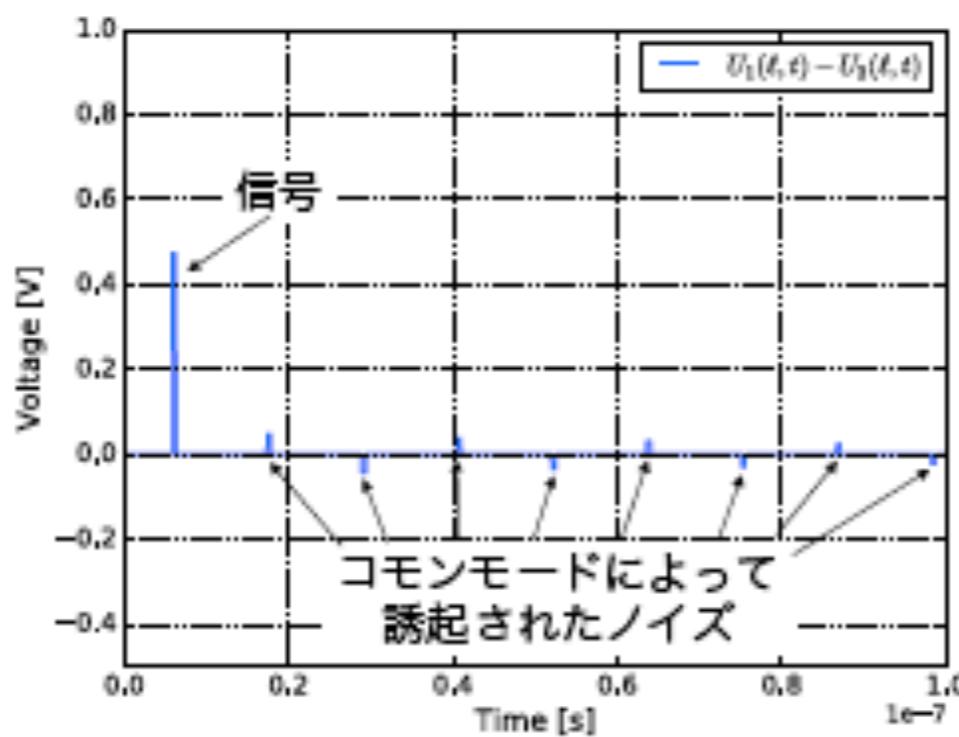
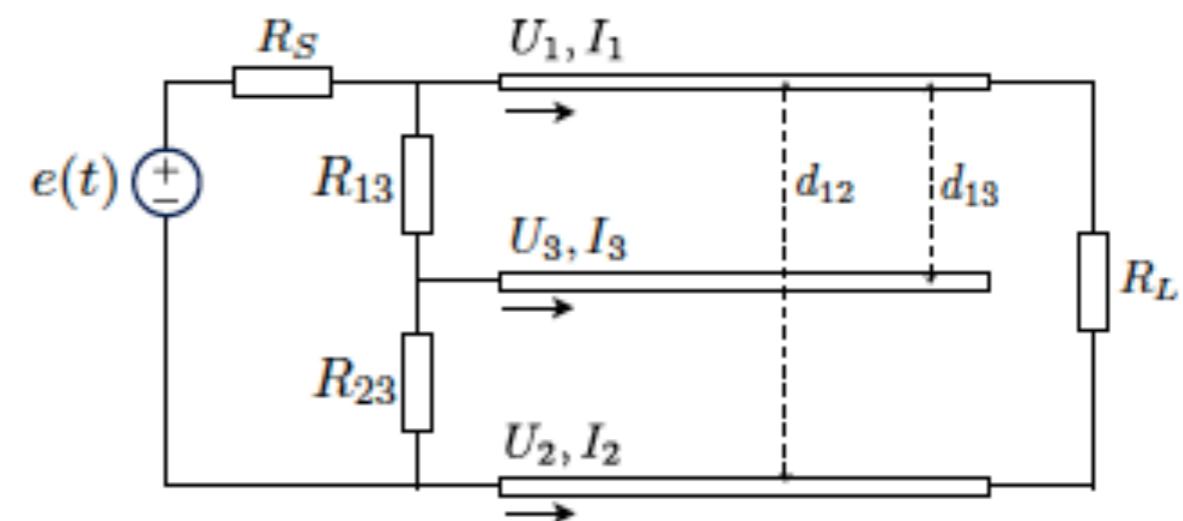
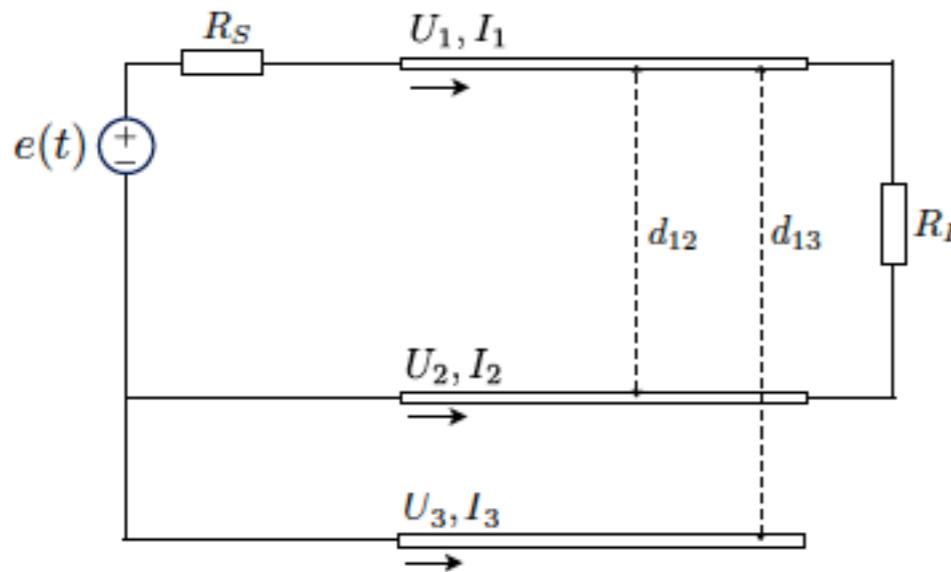
$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_L^T & -\mathbf{Z}_L \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_L^{m+1} \\ \mathbf{I}_L^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon \mathbf{A}_L^T & \delta \mathbf{Z}_L \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_L^m \\ \mathbf{I}_L^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E}_b^{m+1} + \mathbf{E}_b^m \\ \mathbf{J}_b^{m+1} \end{pmatrix}$$



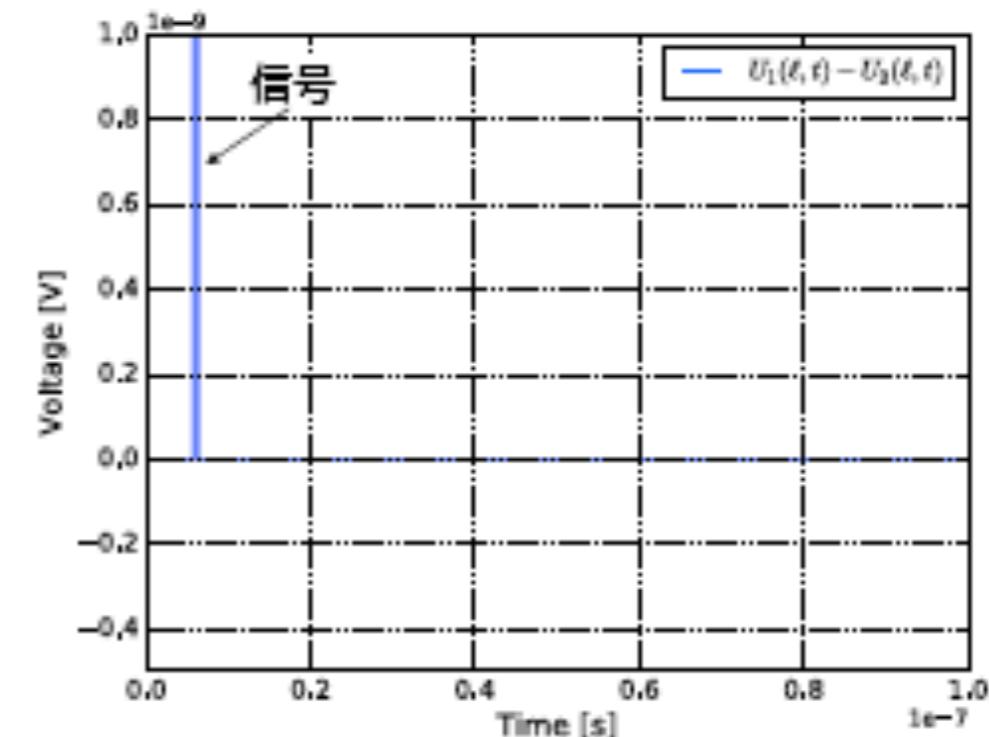
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U^{m+1} = \begin{pmatrix} U_1^{m+1} \\ U_2^{m+1} \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & Z_{11} & Z_{12} \\ 0 & Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad I^{m+1} = \begin{pmatrix} i_R^{m+1} \\ I_1^{m+1} \\ I_2^{m+1} \end{pmatrix} \quad I^m = \begin{pmatrix} i_R^m \\ I_1^m - 2I_1^m \\ I_2^m - 2I_2^m \end{pmatrix}$$

3本線回路：対称・非対称



(a) 非対称伝送線回路



(b) 対称伝送線回路

5 時限日のまとめ 3 本線伝送線路理論

対称化で初めてヘビサイド方程式になる
これが唯一のノイズの削減法

電気回路と伝送線路はわかる学問

ありがとうございました